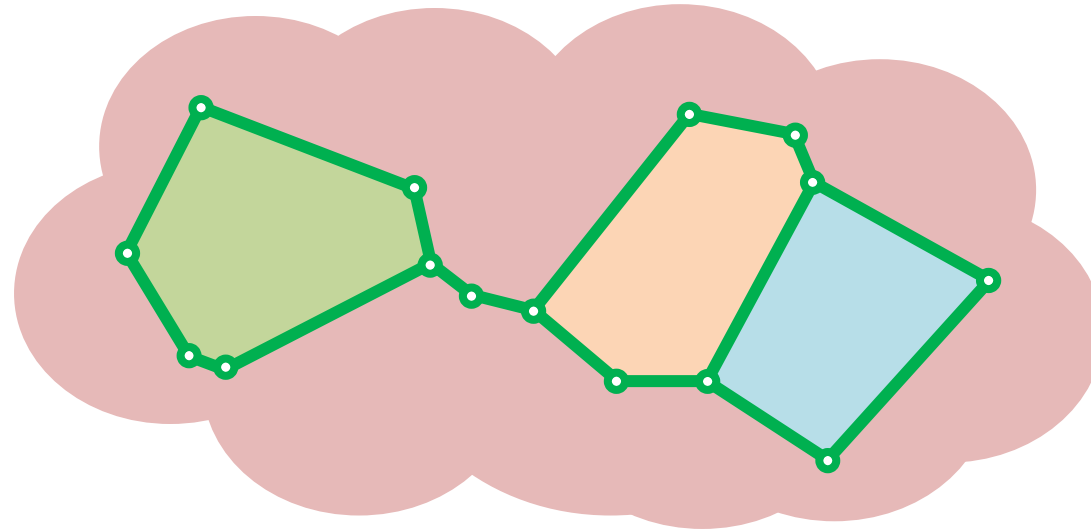


# Grafer og Algoritmer



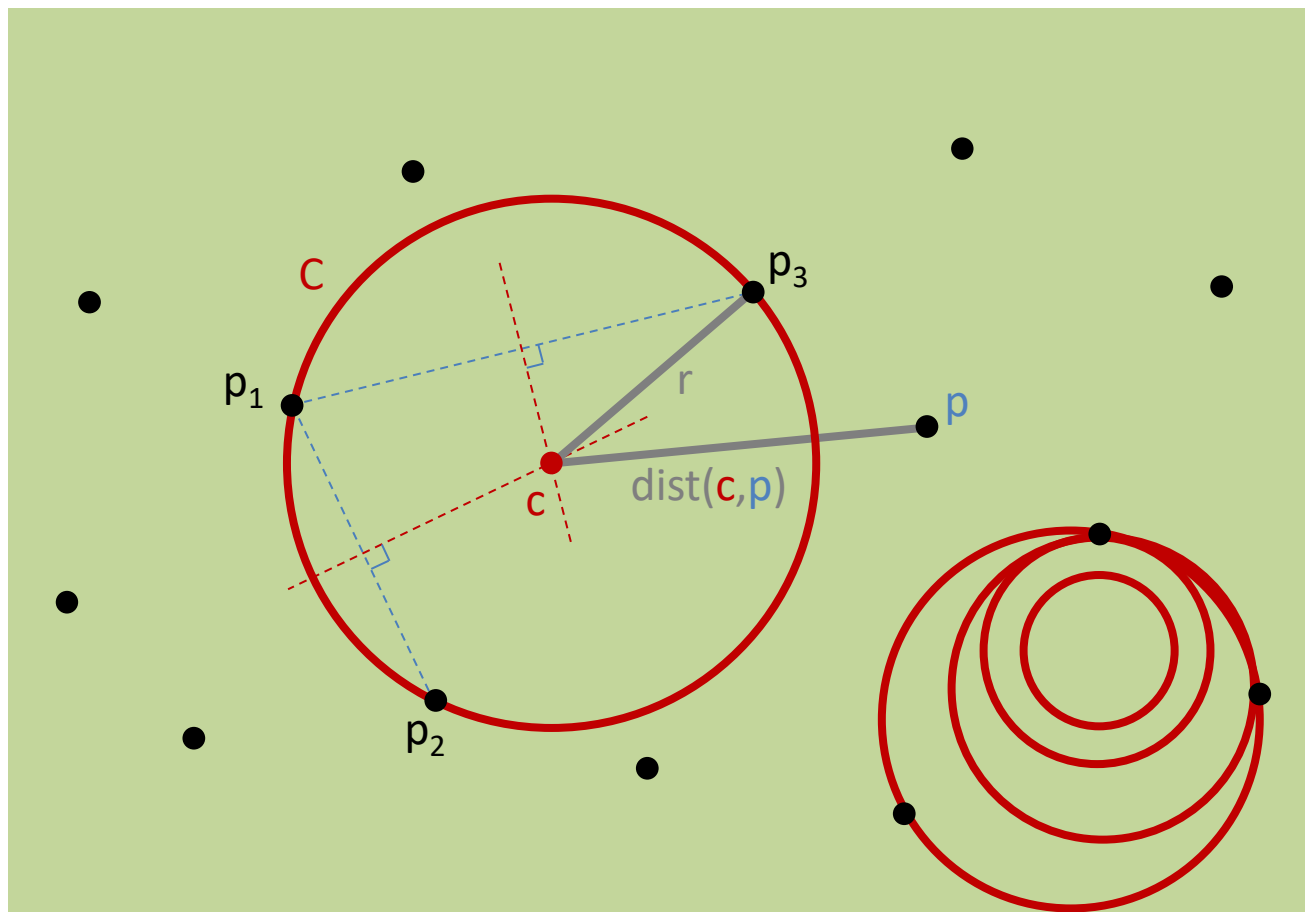
Gerth Stølting Brodal

Institut for Datalogi  
Aarhus Universitet

U-days, Aarhus Universitet, 24.-25. februar 2022

Fokus er på de **overordnede idéer**

# Største Tomme Cirkel

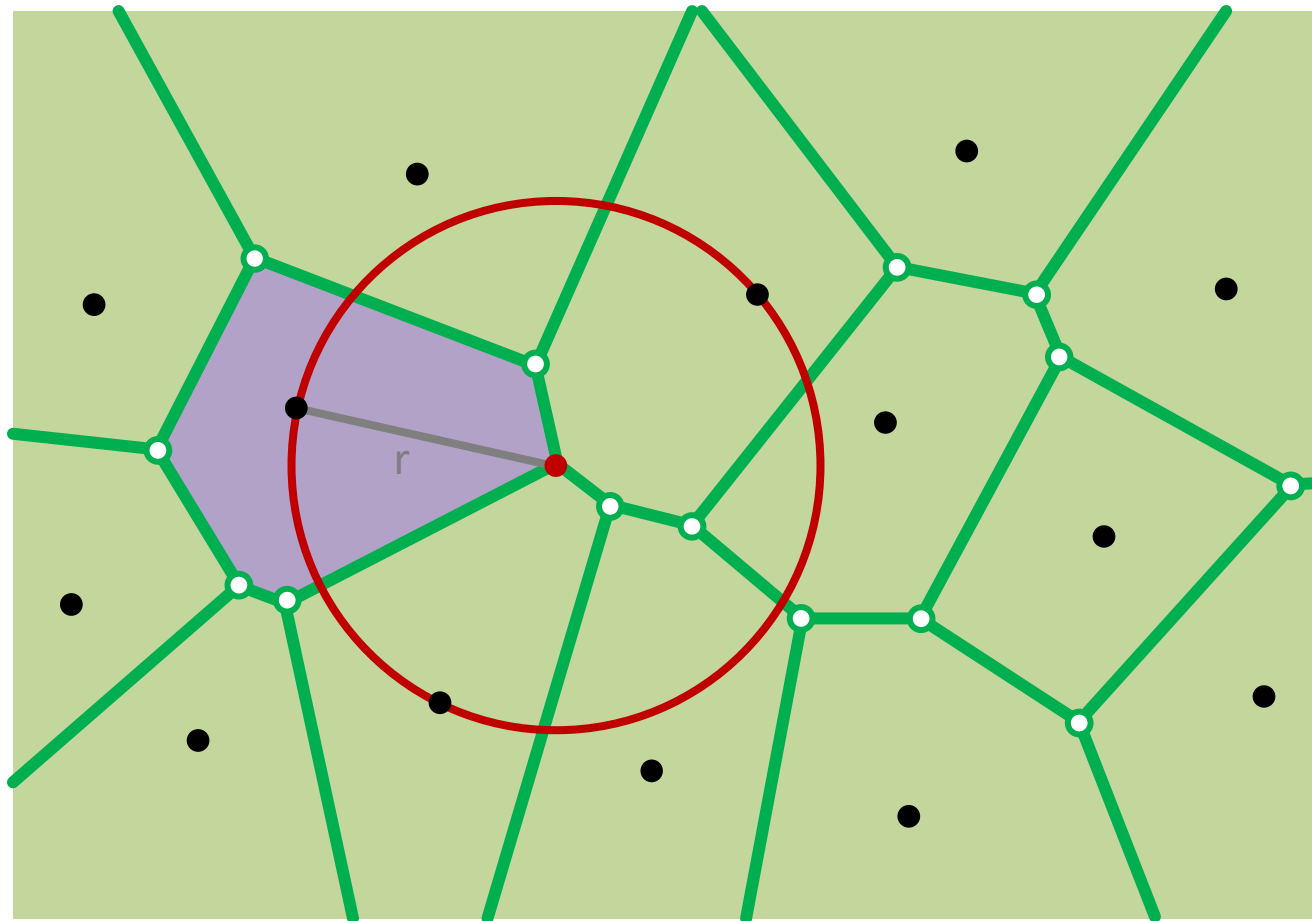


## Algoritme

```
for alle mulige  $(p_1, p_2, p_3)$  :  
  find  $C$  med  $p_1, p_2, p_3$  på randen  
  for alle punkter  $p$  :  
    hvis  $p$  inde i  $C$  prøv næste  $(p_1, p_2, p_3)$   
   $C$  mulig kandidat  
Rapporter største kandidat fundet
```

**Sætning** Største tomme cirkel har  
mindst 3 punkter på randen

# Største Tomme Cirkel



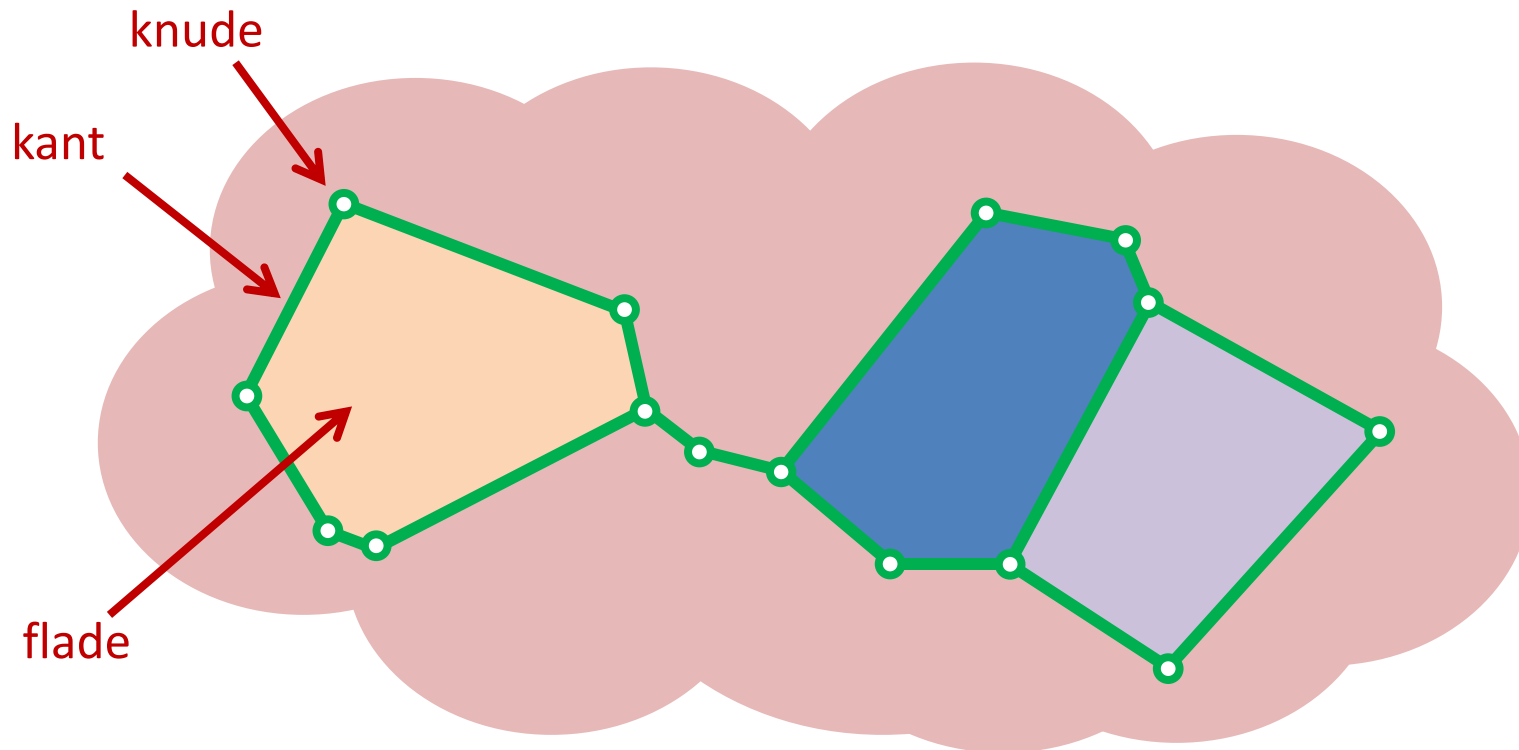
Voronoi diagram

## Algoritme

Konstruer **Voronoi diagrammet**  
For alle **knuder** find **radius** af **cirklen**  
Rapporter **knuden** med størst **radius**

**Sætning** Antal Voronoi **knuder**  $\leq 2 \cdot$  antal **punkter**

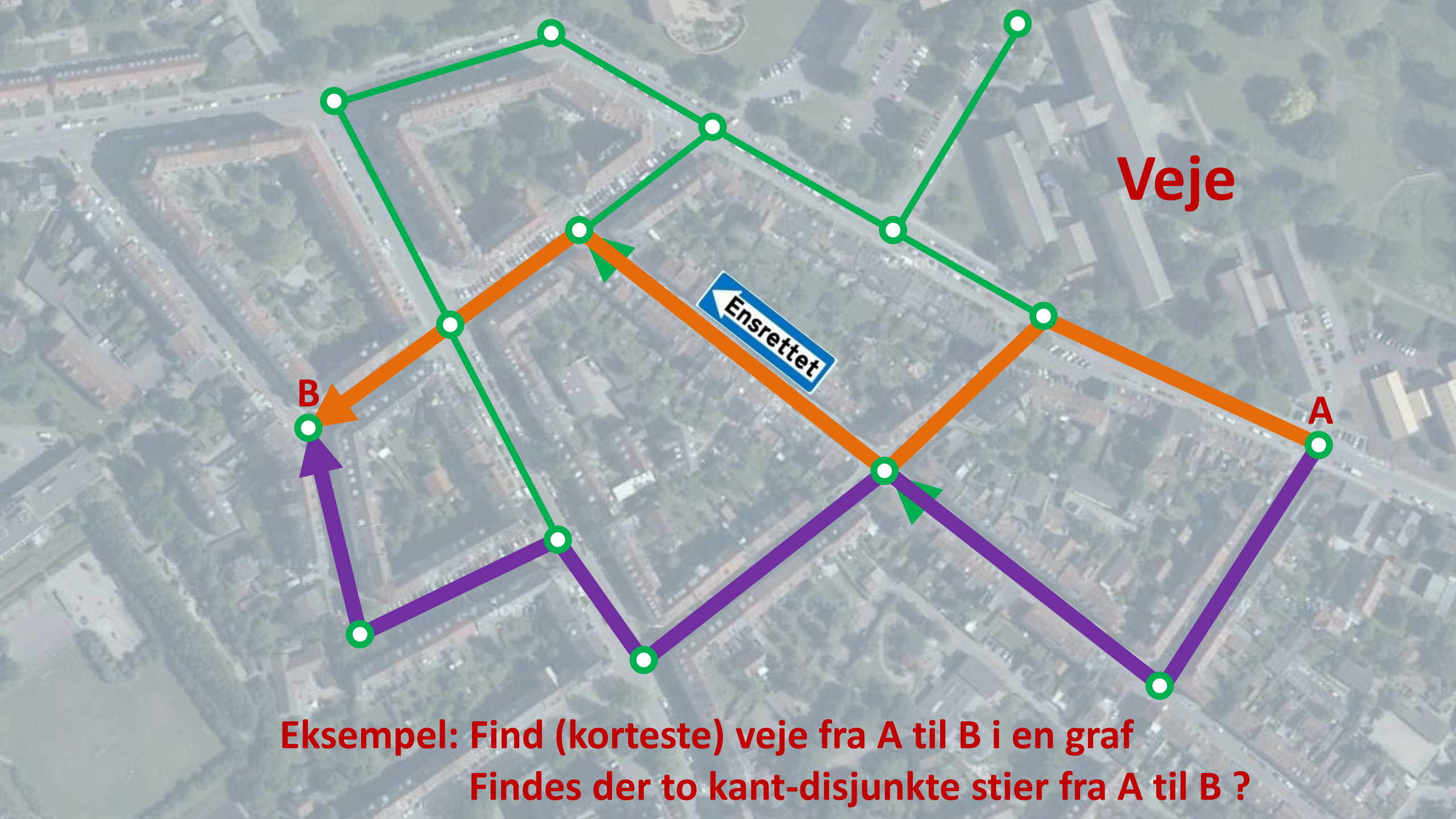
# Graf



**Euler's Sætning** : # knuder + # flader - # kanter = 2

$$15 + 4 - 17 = 2$$

(gælder for sammenhængende grafer der kan tegnes uden krydsende kanter)



**Veje**

**B**

**A**

**Ensrettet**

**Eksempel: Find (korteste) veje fra A til B i en graf**  
**Findes der to kant-disjunkte stier fra A til B ?**

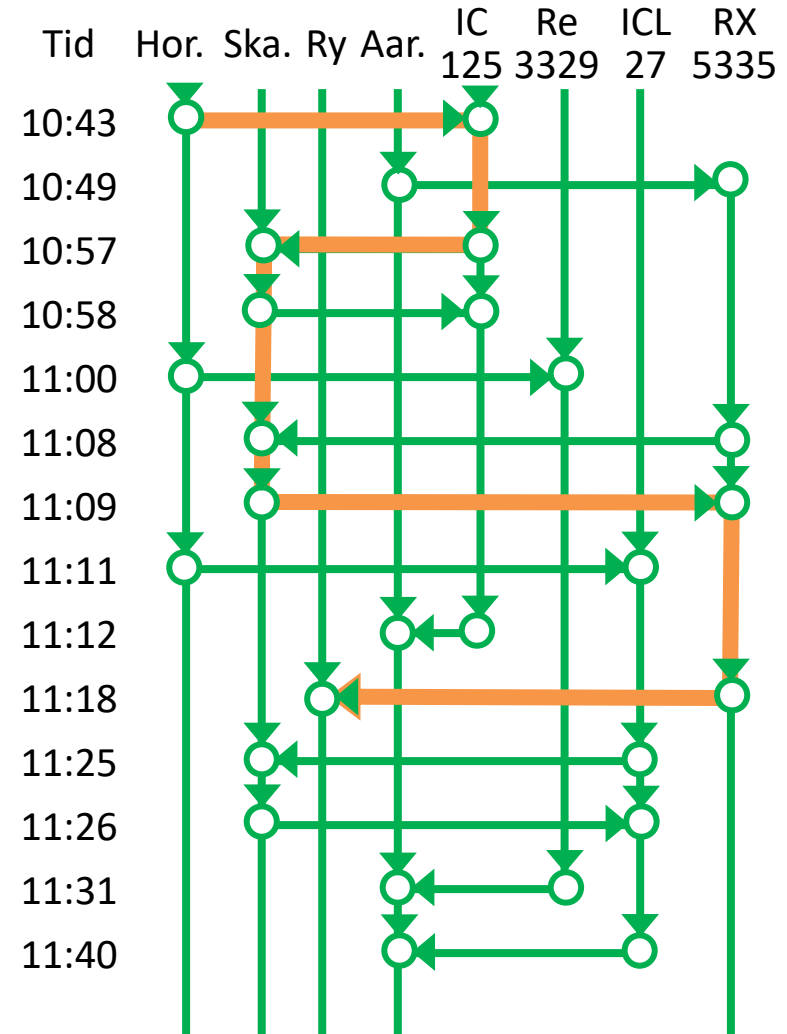


# Rejseplan (Horsens til Ry)

Tog	Ank	Afg	Station
		10:43	Horsens
IC125	10:57	10:58	Skanderborg St
	11:12		Aarhus H
Re3329		11:00	Horsens
	11:31		Aarhus H
		11:11	Horsens
ICL27	11:25	11:26	Skanderborg St
	11:40		Aarhus H
		10:49	Aarhus H
RX5335	11:08	11:09	Skanderborg St
	11:18		Ry St



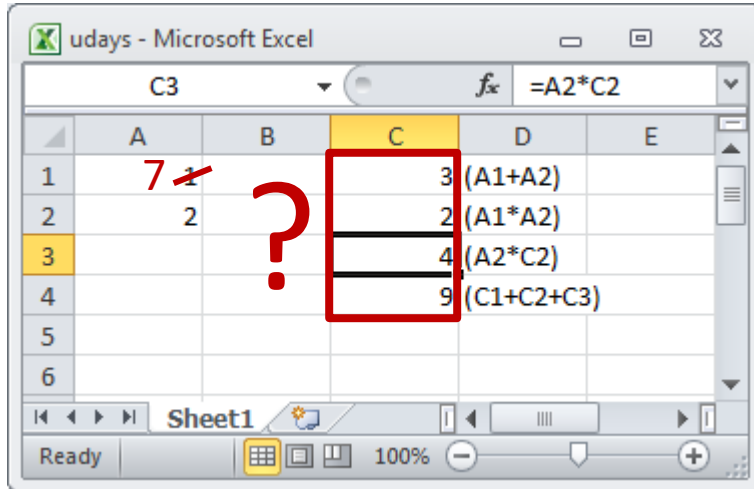
uddrag af køreplaner



## Algoritme

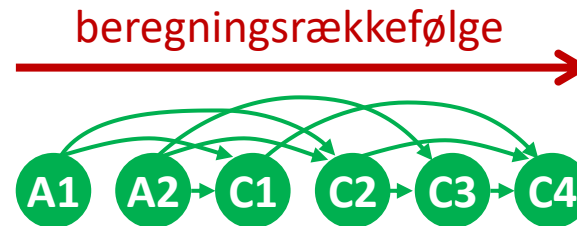
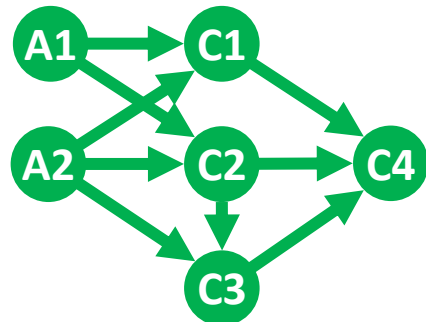
Find tidligste knude for **Ry** der kan nås fra en given start-knude i **Horsens**

# Opdatering af Regneark



## Algoritme

Så længe der findes en uberegnet celle **c**  
hvor alle afhængigheder er beregnet :  
Beregn **c**



## topologisk sortering

alle kanter peger fra venstre mod højre



# Opdatering af Regneark

	A	B	C	D	E
1	1		2 (A1+A2)		
2	0 (A1+C4)		1 (A1*A2)		
3			1 (A2*C2)		
4			4 (C1+C2+C3)		
5					
6					

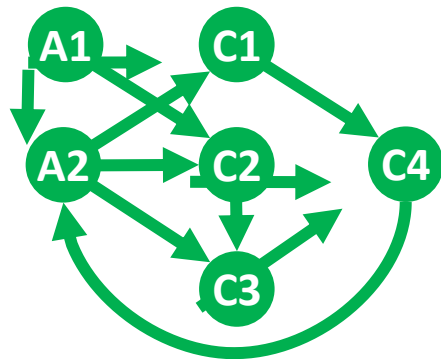
## Algoritme

Så længe der findes en uberegnet celle **c**  
hvor alle afhængigheder er beregnet :

Beregn **c**

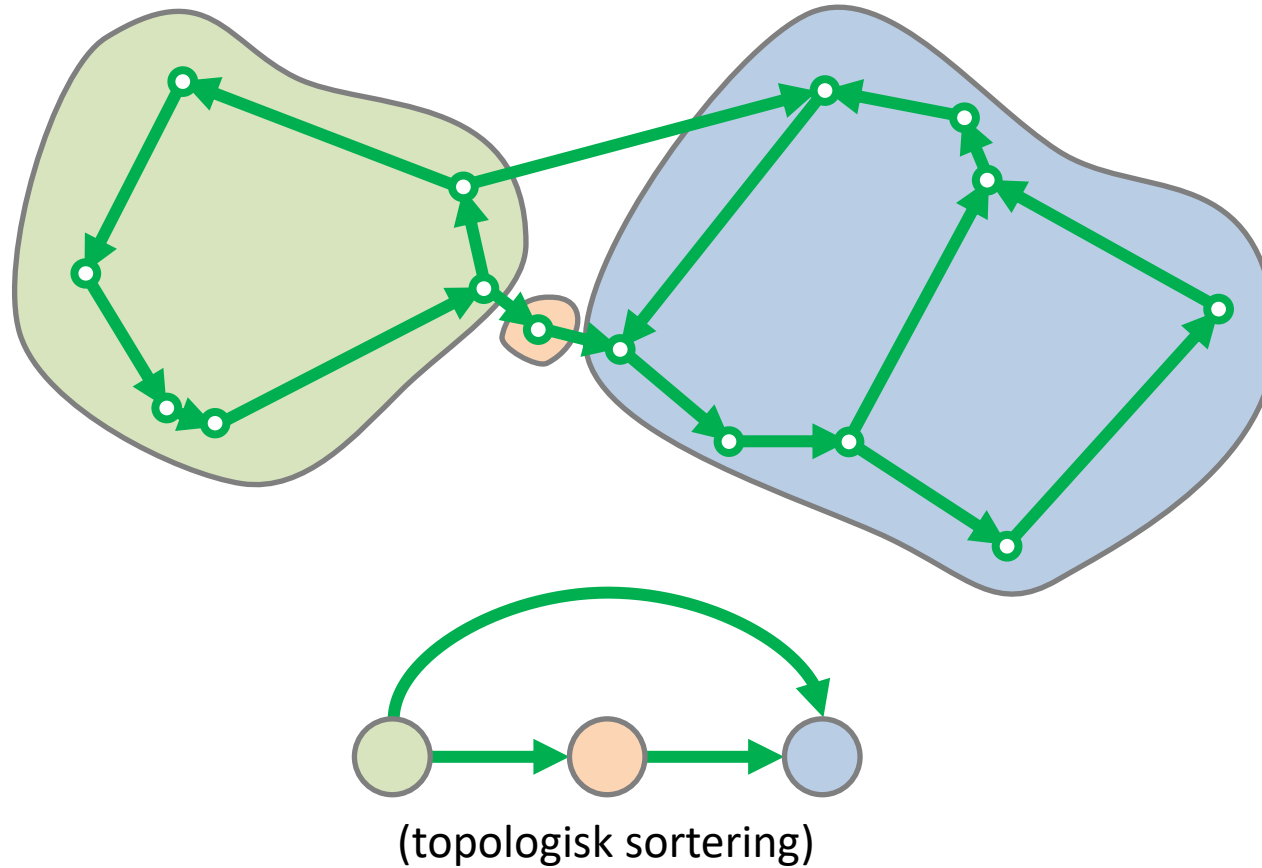
Hvis ikke alle celler beregnet :

Rapporter at der findes en **cykel**



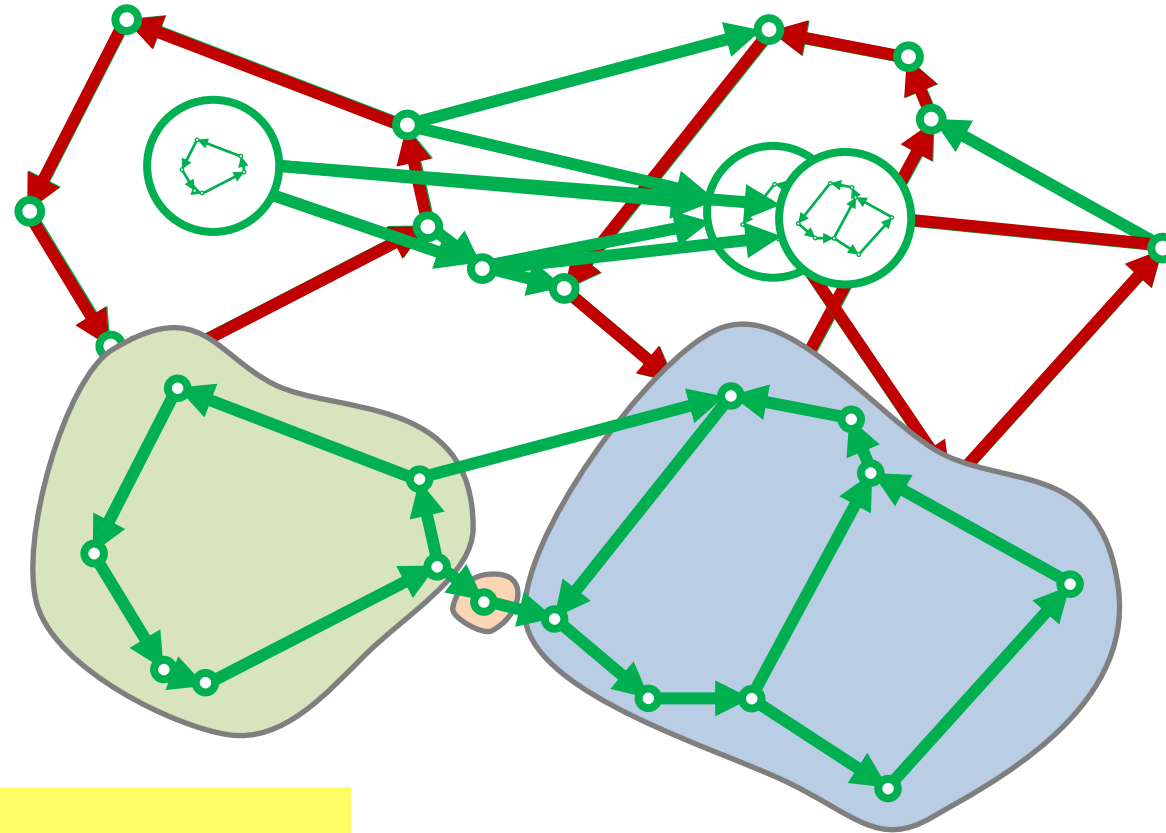
topologisk sorterer  
eller  
identificerer en cykel

# Stærke Sammenhængskomponenter



- Kan alle par af knuder nå hinanden **begge veje** ?  
(bruges f.eks. til at checke for fejl i vej-data)

# Stærke Sammenhængskomponenter



## Algoritme :

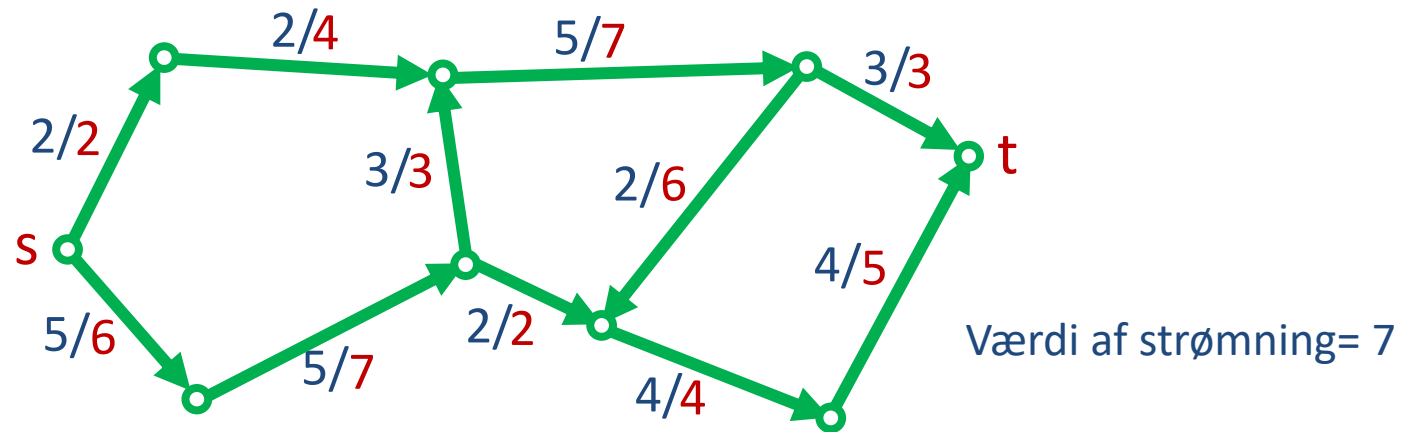
Så længe der findes en cykel **C** :  
Træk **C** sammen til en knude

PAGE 3

DEPARTMENT	COURSE	DESCRIPTION	PREREQS
COMPUTER SCIENCE	CPSC 432	INTERMEDIATE COMPILER DESIGN, WITH A FOCUS ON DEPENDENCY RESOLUTION.	CPSC 432

[xkcd.com/754](http://xkcd.com/754)

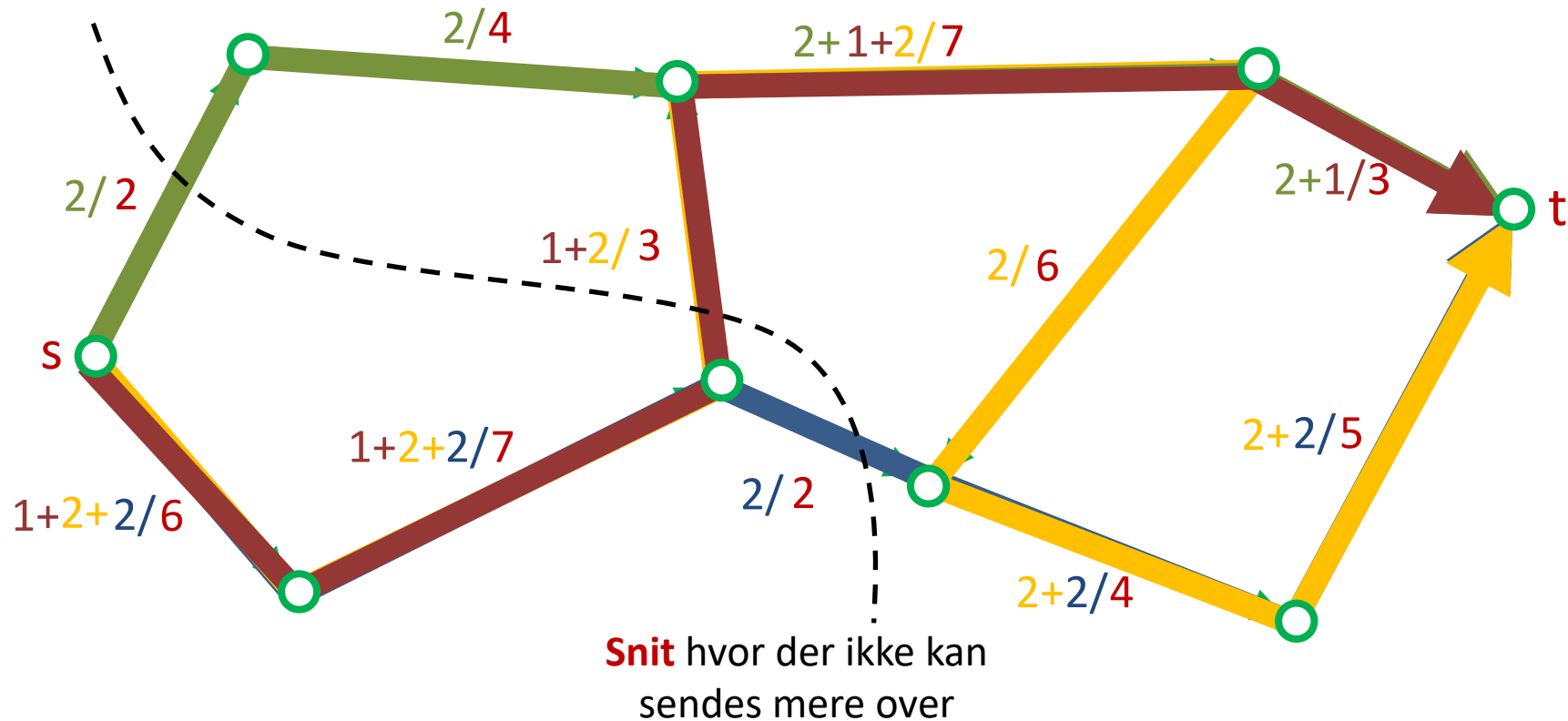
# Strømninger i Netværk



- Hver kant har en **kapacitet**
- Send størst mulig **værdi** fra **s** til **t**

(f.eks. vand, kloak, fjernvarme, vejnet kapacitet, el netværk)

# Beregning af Strømninger i Netværk



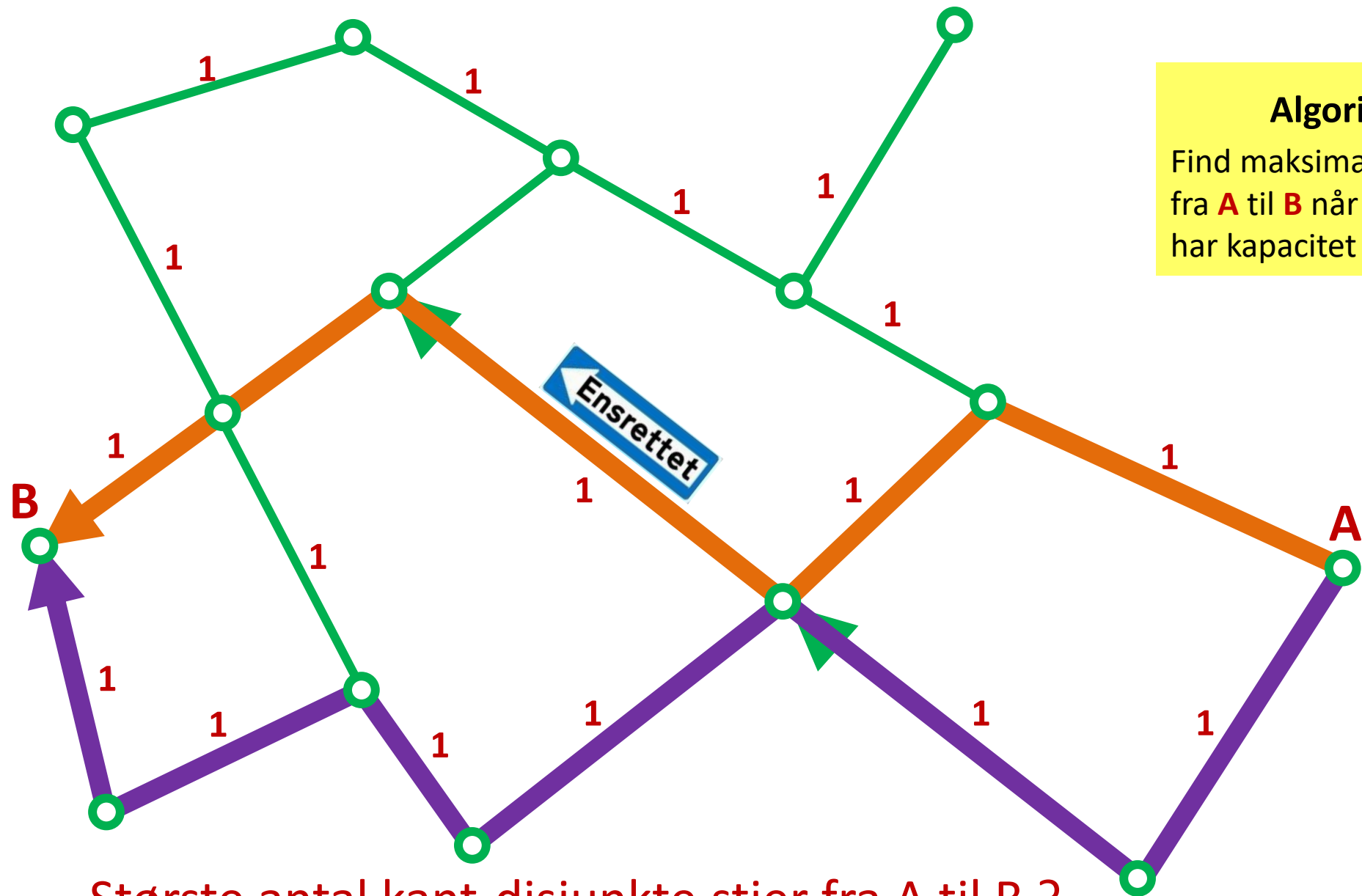
## Algoritme

Så længe der findes en forbedrende sti  $P$  :  
Send maksimal yderligere værdi langs stien  $P$

## Sætning

Max strømning = min snit



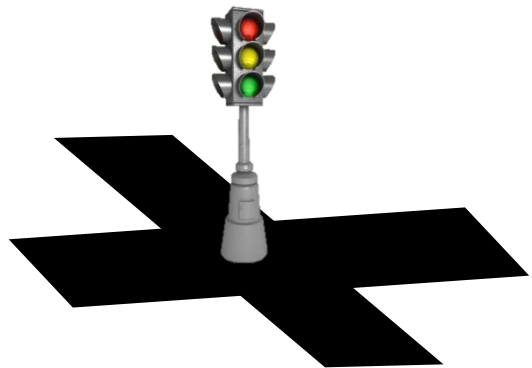


**Algoritme**  
 Find maksimal strømning fra **A** til **B** når alle kanter har kapacitet **1**

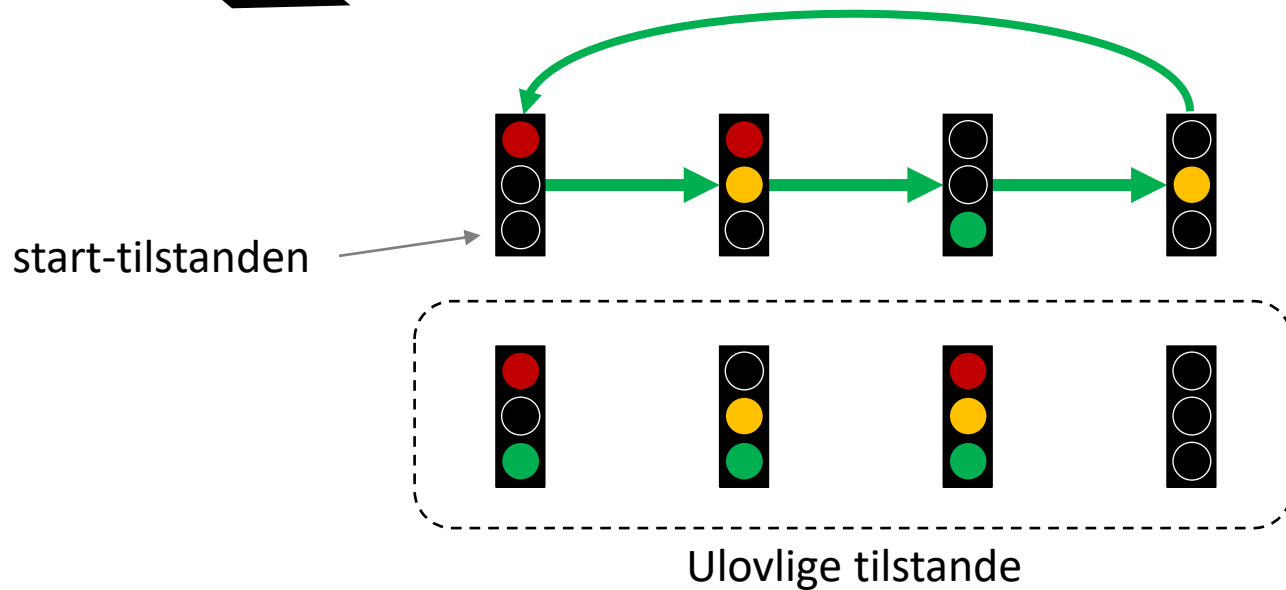
Største antal kant-disjunkte stier fra A til B ?

II (Menger's sætning)

Mindste antal kanter der skal fjernes så B ikke kan nås fra A ?

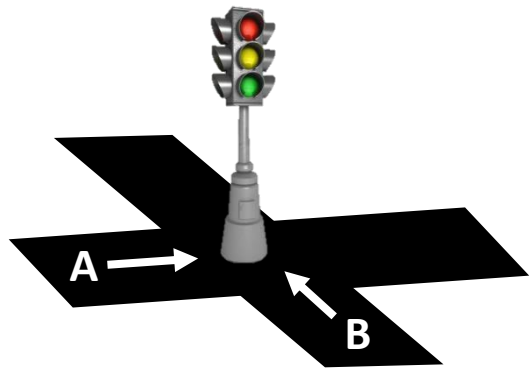


# Lyskryds

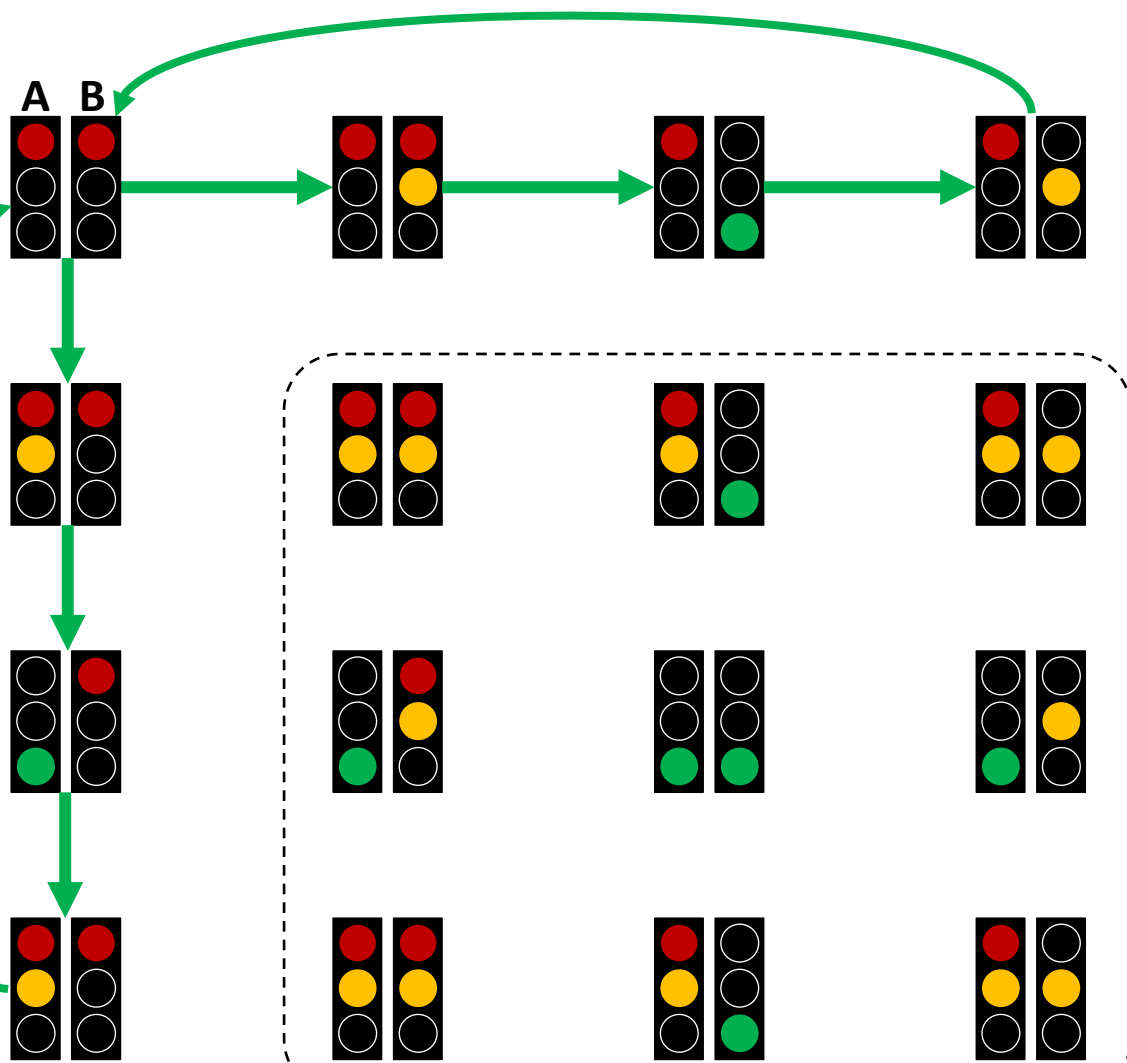


Automatisk kontrol af software til f.eks. styring af lyskryds

- Hvilke tilstande kan man nå (fra start-tilstanden) ?
- Er alle tilstande man kan nå lovlige ?
- Kan der altid blive grønt igen (liveness) ?



# Lyskryds



Ulovlige tilstande

Google Street View  
Randersvej / Vejlbj Ringvej



# Grafer og Algoritmer

## Opsummering

- Planare grafer (Voronoi diagram, Euler's formel)
- Vejnet som grafer (korteste veje, disjunkte stier, stærk sammenhængende)
- Rejseplaner (modellering som graf)
- Regneark (cykler i grafer, topologisk sortering)
- Strømninger i grafer
- 2-kant sammenhængende grafer
- Tilstandsgrafer (lyskryds)

Mange problemer kan løses med generelle **grafalgoritmer**



Følg os og se hvad vi laver



AUdatalogi  
@datalogi



Department of Computer Science,  
Aarhus University



AUdatalogi  
audatalogi



Computer Science  
at Aarhus University  
@csau.dk

