

INSTITUT FOR DATALOGI, AARHUS UNIVERSITET

Science and Technology
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 12
Eksamensdag: Tirsdag den 7. juni 2016, kl. 9.00-11.00
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger og notater). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

Årskort _____

Navn _____

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer 1 (2003-ordning)

Institut for Datalogi
Aarhus Universitet

Tirsdag den 7. juni 2016, kl. 9.00-11.00

Dette eksamenssæt består af en mængde multiple-choice-opgaver. Opgaverne besvares på opgaveformuleringen **som afleveres**.

For hver opgave er angivet opgavens andel af det samlede eksamenssæt.

Hvert delspørgsmål har præcist et rigtigt svar. For hvert delspørgsmål, kan du vælge **max ét svar** ved at afkrydse den tilsvarende rubrik. Et delspørgsmål bedømmes som følgende:

- Hvis du sætter kryds ved det rigtige svar, får du 1 point.
- Hvis du ikke sætter nogen krydser, får du 0 point.
- Hvis du sætter kryds ved et forkert svar, får du $-\frac{1}{k-1}$ point, hvor k er antal svarmuligheder.

For en opgave med vægt $v\%$ og med n delspørgsmål, hvor du opnår samlet s point, beregnes din besvarelse af opgaven som:

$$\frac{s}{n} \cdot v \%$$

Bemærk at det er muligt at få negative point for en opgave.

Opgave 3 (10 %)

Angiv for hver af nedenstående algoritmer udførelstiden som funktion af n i O -notation.

Algoritme Loop1(n)
 $i = 2$
while $i \leq n$
 $i = i + 1$

Algoritme Loop2(n)
 $i = 2$
while $i \leq n$
 $i = 3 * i$

Algoritme Loop3(n)
 $i = 2$
while $i \leq n$
 $i = i * i$

Algoritme Loop4(n)
 $i = 0$
 $s = 0$
while $s \leq n$
 $s = s + i$
 $i = i + 1$

Algoritme Loop5(n)
 $i = 0$
 $s = 0$
while $s \leq n$
 if $i < s$ **then**
 $i = i + 1$
 else
 $s = s + 1$
 $i = 0$

Algoritme Loop6(n)
 $i = 1$
while $i \leq n$
 $s = 0$
 while $s \leq i$
 $s = s + 1$
 $i = 2 * i$

	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n\sqrt{n})$	$O(\sqrt{n})$	$O(\log \log n)$	$O(n^3)$
Loop1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Loop6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 4 (4 %)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
13	10	8	7	9	6	4	1	3	5	2

Angiv hvordan ovenstående binære max-heap ser ud efter HEAP-EXTRACT-MAX.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	8	7	9	6	4	1	3	5	2	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	9	8	7	5	6	4	1	3	2	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	9	6	7	8	2	4	1	3	5	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	9	8	7	2	6	4	1	3	5	

Opgave 5 (4%)

Angiv den binære max-heap efter indsættelse af elementerne 5, 2, 6, 3, 1, 7 og 4 i den givne rækkefølge, startende med den tomme heap.

- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 5 | 6 | 2 | 3 | 1 | 4 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 3 | 6 | 2 | 1 | 5 | 4 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 7 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 6 (4%)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	7	5	6	3	9	10	8

Angiv hvordan ovenstående array ser ud efter anvendelsen af BUILD-MAX-HEAP.

- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 6 | 7 | 8 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 6 | 7 | 8 | 4 | 3 | 1 | 2 | 5 | <input type="checkbox"/> |
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 6 | <input type="checkbox"/> |

Opgave 7 (4%)

Betragt RADIX-SORT anvendt på nedenstående liste af tal ($d = 5, k = 3$).

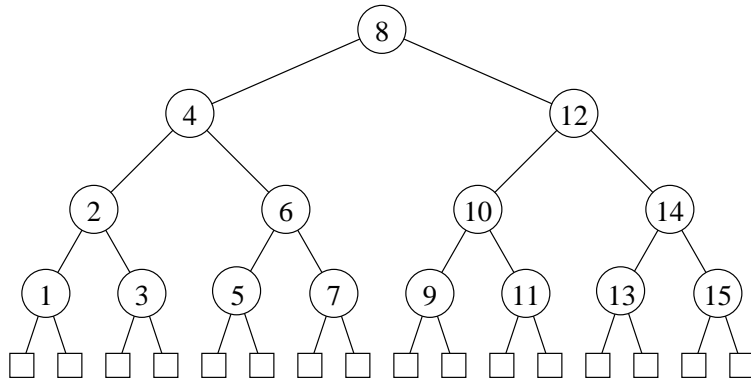
33300 33220 33110 10300 21110

Angiv den delvist sorterede liste efter at radix-sort har sorteret tallene efter de tre mindst betydende cifre.

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|
| 10300 | 21110 | 33110 | 33220 | 33300 | <input type="checkbox"/> |
| 33300 | 10300 | 33110 | 21110 | 33220 | <input type="checkbox"/> |
| 33110 | 21110 | 33220 | 33300 | 10300 | <input type="checkbox"/> |
| 10300 | 21110 | 33300 | 33220 | 33110 | <input type="checkbox"/> |
| 21110 | 33110 | 33220 | 10300 | 33300 | <input type="checkbox"/> |

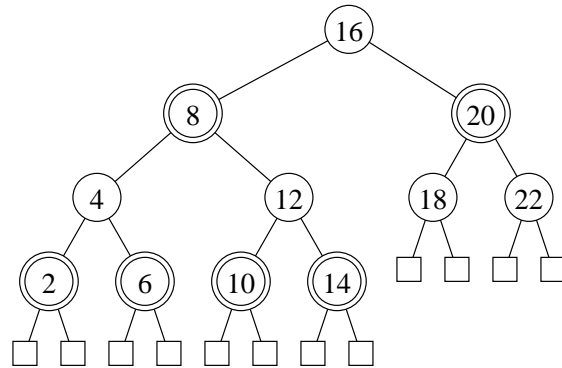
Opgave 10 (4%)

For hver af nedenstående delmængder, angiv om nedenstående binære træ er et lovligt rød-sort træ hvis netop disse knuder farves røde

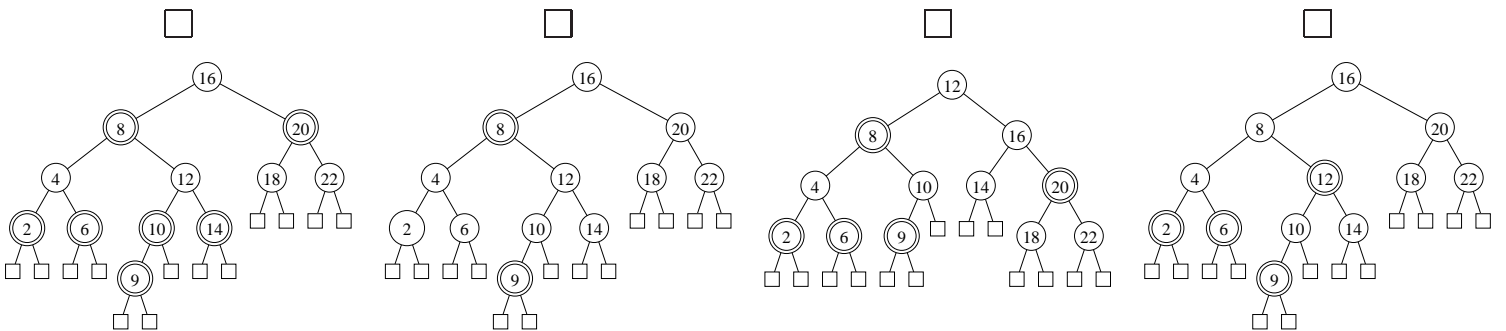


- | | Ja | Nej |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|
| 2, 6, 8, 10, 14 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1, 3, 6, 12 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ∅ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4, 7, 12, 15 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1, 3, 6, 8, 12 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Opgave 11 (4%)



Angiv det resulterende rød-sortede træ når man indsætter 9 i ovenstående rød-sortede træ (dobbeltcirkler angiver røde knuder).



Opgave 14 (4%)

I følgende hashtabel af størrelse 11 er anvendt *kvadratisk probing* med hashfunktionen $h(k, i) = (k + 2 \cdot i^2) \bmod 11$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		24		15					42	

Angiv positionerne de tre elementer 7, 9 og 2 vil blive indsat på i hashtabellen (for hver af indsættelserne antager vi at hashtabellen kun indeholder elementerne 15, 24 og 42).

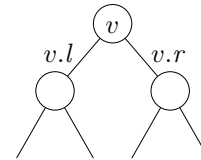
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Insert(7)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(9)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Insert(2)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 15 (4%)

Betragt en liste af n par $(x_1, c_1), \dots, (x_n, c_n)$, hvor $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ er reelle tal og hvert $c_i \in \{\text{Red, Green, Blue}\}$ er en farve.

Betragt et søgetræ hvor hver knude v gemmer et par $(v.x, v.c)$, og knuderne er ordnet venstre-mod-højre efter stigende $v.x$. Derudover gemmes i en knude v , en sandhedsværdi $v.mono$, der angiver om alle elementer i v 's undertræ har samme farve, og mængden $v.missing$ af de farver der *ikke* forekommer i v 's undertræ.

Angiv hvorledes $v.mono$ og $v.missing$ kan beregnes når den tilsvarende information er kendt ved de to børn $v.l$ og $v.r$ (det kan antages at disse begge eksisterer).



$$v.mono = \begin{cases} v.l.mono \wedge v.r.mono & \square \\ v.l.mono \wedge v.r.mono \wedge v.l.c = v.r.c \wedge v.c = v.r.c & \square \\ v.l.mono \wedge v.r.mono \wedge v.l.c = v.r.c & \square \\ v.l.mono \wedge v.r.mono \wedge v.mono & \square \end{cases}$$

$$v.missing = \begin{cases} v.l.missing \cup v.r.missing & \square \\ v.l.missing \cap v.r.missing & \square \\ \{v.c\} \cup v.l.missing \cup v.r.missing & \square \\ (v.l.missing \cap v.r.missing) \setminus \{v.c\} & \square \end{cases}$$

Transitionssystem LOG
Konfigurationer: $\{[x, r, p] \mid \text{heltal } x, r \geq 2 \text{ og } p \geq 0\}$
 $[x, r, p] \triangleright [x, 2r, p + 1] \quad \text{if } r \leq x$

Opgave 16 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant for ovenstående transitionssystem LOG. Startkonfigurationen antages at være $[x_0, 2, 0]$, hvor $x_0 \geq 2$.

	Ja	Nej
$r \leq x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = 2r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = 2^{p+1}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\lfloor \log_2 x_0 \rfloor = p + \lfloor \log_2(2x/r) \rfloor$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p = \lfloor \log_2 x_0 \rfloor$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 17 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående transitionssystem LOG. Startkonfigurationen antages at være $[x_0, 2, 0]$, hvor $x_0 \geq 2$.

	Ja	Nej
$\mu(x, r, p) = x - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, r, p) = 2x - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, r, p) = p$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, r, p) = \lfloor x/r \rfloor$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(x, r, p) = \lfloor r/p \rfloor$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 18 (4%)

Hvor mange gange kaldes RANDOMIZED-PARTITION i RANDOMIZED-SELECT på et array af størrelse n ?

	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\sqrt{n})$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
Forventede antal kald	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Færrest antal kald (best case)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Flest antal kald (worst case)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Givet et sorteret array $A[1..n]$ indeholdende $n \geq 1$ forskellige heltal i intervallet $[1, N]$, dvs. $1 \leq A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[n-1] \leq A[n] \leq N$, identificerer nedenstående algoritme antallet af kvadrattal i A , dvs. beregner

$$\text{squares}(A) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n \wedge A[i] = x^2 \text{ for et positivt heltal } x\}|.$$

Algoritme SQUARES($A[1..n]$)

Inputbetingelse : Sorteret array $A[1..n]$ med n heltal, $1 \leq A[i] \leq N$

Outputkrav : $r = \text{squares}(A)$

Metode : $i \leftarrow 1$;

$x \leftarrow 1$;

$r \leftarrow 0$;

{I} while $i \leq n$ do

if $x^2 < A[i]$ **then**

$x \leftarrow x + 1$

else

if $x^2 = A[i]$ **then**

$r \leftarrow r + 1$

$i \leftarrow i + 1$

Opgave 19 (4%)

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme SQUARES. I nedenstående antages det at $A[n+1] = \infty$.

	Ja	Nej
$x \leq A[i]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(x-1)^2 < A[i] \wedge r = \text{squares}(A[1..i-1])$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$1 \leq i \leq n$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x^2 = A[i]$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 20 (4%)

For hver af nedenstående funktioner, angiv om de er en termineringsfunktion for ovenstående algoritme SQUARES.

	Ja	Nej
$\mu(i, x, r, n) = n - r$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, x, r, n) = n + 1 - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, x, r, n) = n - i$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, x, r, n) = N - x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mu(i, x, r, n) = n + 1 - i + N - x$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 21 (4%)

Lad $x \geq 2$ være et ikke-negativt heltal, og lad $pf(x)$ antal faktorer i primtalsfaktoriseringen af x . F.eks. $pf(72) = pf(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3) = 5$. Nedenstående algoritme beregner $pf(x)$.

```
Algoritme PRIMEFACTORS( $x$ )  
Inputbetingelse : Heltal  $x \geq 2$   
Outputkrav      :  $r = pf(x)$   
Metode          :  $r \leftarrow 0; p \leftarrow 2;$   
                   $\{I\}$  while  $x \geq 2$  do  
                    if  $x \bmod p = 0$  then  
                       $x \leftarrow x/p; r \leftarrow r + 1$   
                    else  
                       $p \leftarrow p + 1$ 
```

For hvert af nedenstående udsagn, angiv om de er en invariant I for ovenstående algoritme PRIMEFACTORS, hvor x_0 angiver den initielle værdi af x . Den mindste primtalsfaktor i x betegnes $minpf(x)$, f.eks. $minpf(35) = minpf(5 \cdot 7) = 5$. Specielt defineres $pf(1) = 0$ og $minpf(1) = 1$.

	Ja	Nej
$r = pf(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x = 1 \vee p \leq minpf(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x = 1 \vee minpf(x) \geq minpf(x_0)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$r + pf(x_0) = pf(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x_0 \bmod x = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Opgave 22 (4%)

Betragt en liste L af heltal, hvorpå vi kan udføre følgende to operationer: APPEND(x) tilføjer heltallet x til sidst i listen, og ADDPAIRS erstatter for alle $i = 1.. \lfloor |L|/2 \rfloor$ det $2i - 1$ 'te og $2i$ 'te tal med deres sum, således at den nye liste har længde $\lceil |L|/2 \rceil$. F.eks. resulterer ADDPAIRS på listen 3, 5, 7, 4, 11, 2, 6 i den nye liste 8, 11, 13, 6. Worst-case tiden for APPEND og ADDPAIRS er henholdsvis $O(1)$ og $O(|L|)$.

Med en passende potentialefunktion kan man argumentere for at begge operationer tager amortiseret $O(1)$ tid. Angiv for hver af nedenstående om dette er en sådan potentialefunktion Φ , hvor N er antal elementer i listen.

	Ja	Nej
N	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\log N$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$N + \log N$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$N/2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$N \cdot \log N$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>