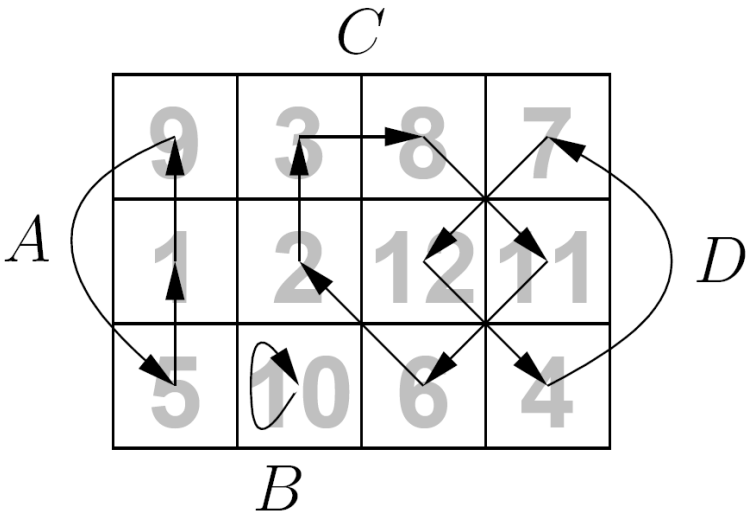
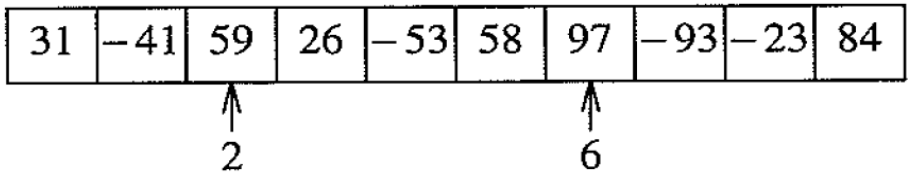
Grundlæggende Algoritmer og Datastrukturer

Analyseværktøjer [CLRS, 1-3.1]

Eksempler på en beregningsprocess…



Puslespil ved ombytninger



Maximum delsum

Hvad er udførselstiden for en algoritme?

Fra Idé til Programudførelse

Idé

Del og Kombiner ?

Pseudokode

```
...
for each x in m up to middle
      add x to left
for each x in m after middle
      add x to right
...
```

(Java-)kode

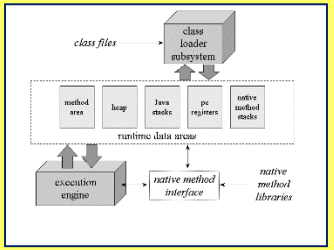
```
...
if ( t1[t1index] <= t2[t2index] )
      a[index] = t1[t1index++];
else
      a[index] = t2[t2index++];
...
```

Compiler

Maskinkode

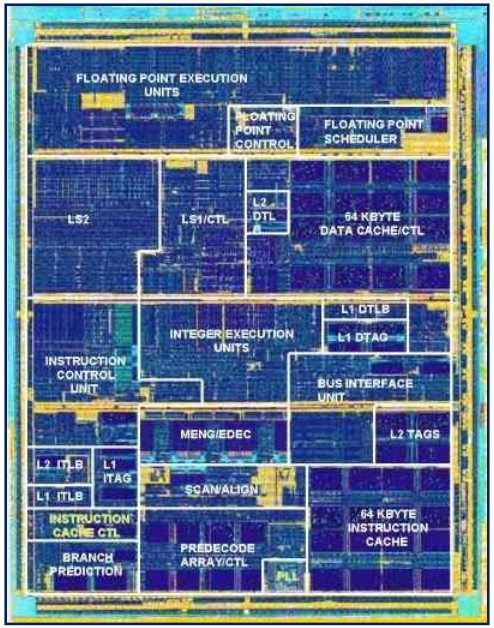
Assembler

(Java) Bytekode



+ Virtuel maskine

Program-udførsel



Mikrokode

Virtuel hukkomelse/ TLB

L1, L2,… cache

Branch Prediction

Pipelining

...

Hvad er udførselstiden for en algoritme?

a) Tiden (min/sec) for at køre program
b) # instruktioner der udføres
c) # hukommelsesceller der læses/skrives
d) # procedure kald
e) Andet

Maskiner har forskellig hastighed...

Maskine	Tid (sek)
camel19	8.9
molotov	10.2
harald	26.2
gorm	7.8

Tid for at sortere linierne i en 65 MB web log på forskellige maskiner på Institut for Datalogi

Idé:

Argumenter om algoritmer uafhængig af maskine

Design af Algoritmer

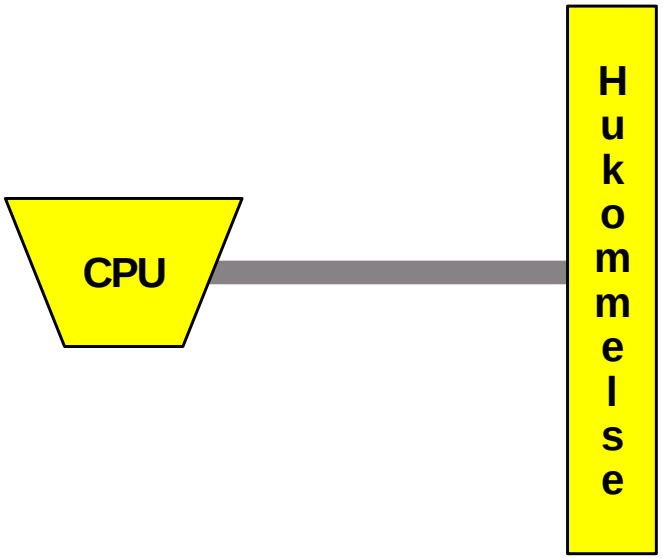
Korrekt algoritme

- algoritmen **standser** på alle input
- output er det **rigtige** på alle input

Effektivitet

- Optimer algoritmerne mod at bruge **minimal** tid, plads, additioner,... eller **maximal** parallellisme...
- $\sim n^2$ er bedre end $\sim n^3$: **assymptotisk tid**
- Mindre vigtigt : **konstanterne**
- Resouceforbrug: **Worst-case** eller **gennemsnitlig**?

RAM Modellen
(Random Access Machine)



- Beregninger sker i CPU
- Data gemmes i hukommelsen
- Basale operationer tager **1 tidsenhed**:

  +, -, *, AND, OR, XOR, **get(i)**, **set(i,v)**, ...
- Et maskinord indeholder $c \cdot \log n$ **bits**

Eksempel: Insertion-Sort

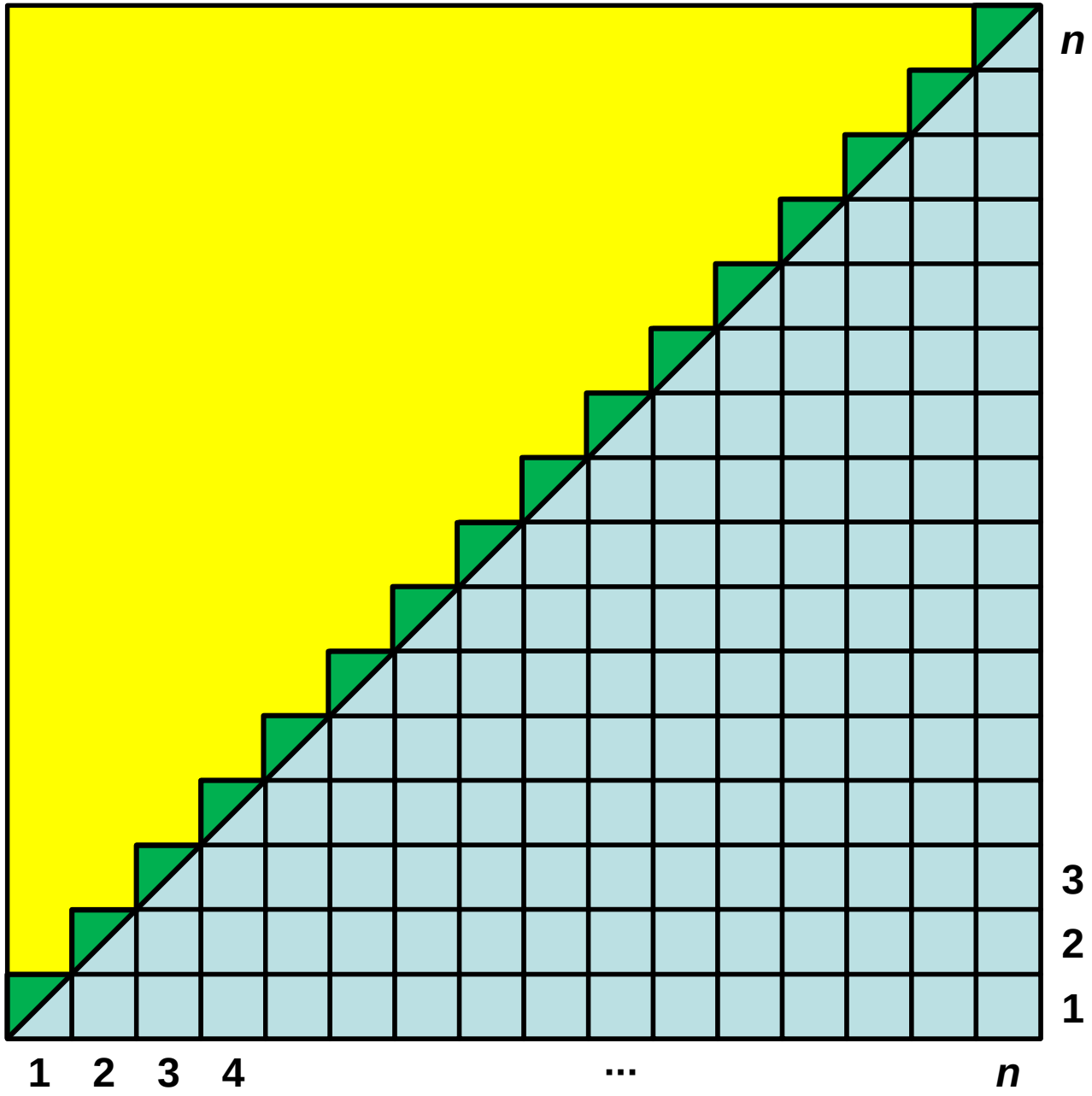
```
INSERTION-SORT(A)
1  for j = 2 to A.length
2      key = A[j]
3      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
4      i = j − 1
5      while i > 0 and A[i] > key
6          A[i + 1] = A[i]
7          i = i − 1
8      A[i + 1] = key
```

Hvor mange gange udføres linie 6 ?

a) ~ n
b) ~ n log n
c) ~ n^2
d) ~ n^3
e) Ved ikke

```
INSERTION-SORT(A)
1  for j = 2 to A.length
2      key = A[j]
3      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
4      i = j − 1
5      while i > 0 and A[i] > key
6          A[i + 1] = A[i]
7          i = i − 1
8      A[i + 1] = key
```

$$1 + 2 + \cdots + n$$
$$= n^2/2 + n/2$$
$$= n(n + 1)/2$$



Insertion-Sort (C)

```
insertion(int a[], int N)
 { int i, j, key;

   for(j=1; j < N; j++)
    { key = a[j];
      i = j-1;
      while( i>=0 && a[i] > key )
       { a[i+1] = a[i];
         i--;
       }
      a[i+1] = key;
    }
 }
```

```
insertion:
                pushl           %ebp
                movl            %esp, %ebp
                pushl           %edi
                pushl           %esi
                pushl           %ebx
                subl            $12, %esp
                cmpl            $1, 12(%ebp)
                jle             .L3
                movl            8(%ebp), %edx
                xorl            %ebx, %ebx
                movl            8(%ebp), %eax
                movl            $1, -16(%ebp)
                movl            4(%edx), %edx
                addl            $4, %eax
                movl            %eax, -20(%ebp)
                movl            %edx, -24(%ebp)
                .p2align 4,,7
.L6:
                movl            8(%ebp), %ecx
                leal            0(,%ebx,4), %esi
                movl            (%ecx,%ebx,4), %eax
                cmpl            -24(%ebp), %eax
                jle             .L8
                movl            %ecx, %edi
                leal            -4(%esi), %ecx
                leal            (%ecx,%edi), %edx
                jmp             .L9
                .p2align 4,,7
.L16:
                movl            (%edx), %eax
                movl            %ecx, %esi
                subl            $4, %edx
                subl            $4, %ecx
                cmpl            -24(%ebp), %eax
                jle             .L8
.L9:
                movl            -20(%ebp), %edi
                subl            $1, %ebx
                movl            %eax, (%edi,%esi)
                jns             .L16
.L8:
                movl            -16(%ebp), %edi
                movl            8(%ebp), %edx
                leal            (%edx,%edi,4), %eax
.L5:
                movl            -24(%ebp), %ecx
                movl            -20(%ebp), %edx
                addl            $1, -16(%ebp)
                movl            -16(%ebp), %edi
                movl            %ecx, (%edx,%ebx,4)
                cmpl            %edi, 12(%ebp)
                jle             .L3
                movl            4(%eax), %edx
                movl            %edi, %ebx
                addl            $4, %eax
                subl            $1, %ebx
                movl            %edx, -24(%ebp)
                jns             .L6
                jmp             .L5
.L3:
                addl            $12, %esp
                popl            %ebx
                popl            %esi
                popl            %edi
                popl            %ebp
                ret
```

Eksempel: Insertion-Sort

- Eksempel på **pseudo-kode**
- Detaljeret analyse – stort arbejde
- Tid: **worst-case** ($\sim n^2$) og **best-case** ($\sim n$) meget forskellige
- Tid: **gennemsnitlige** ($\sim n^2$)
- Hurtigere på ~ sorterede input: **adaptive**

Asymptotisk notation

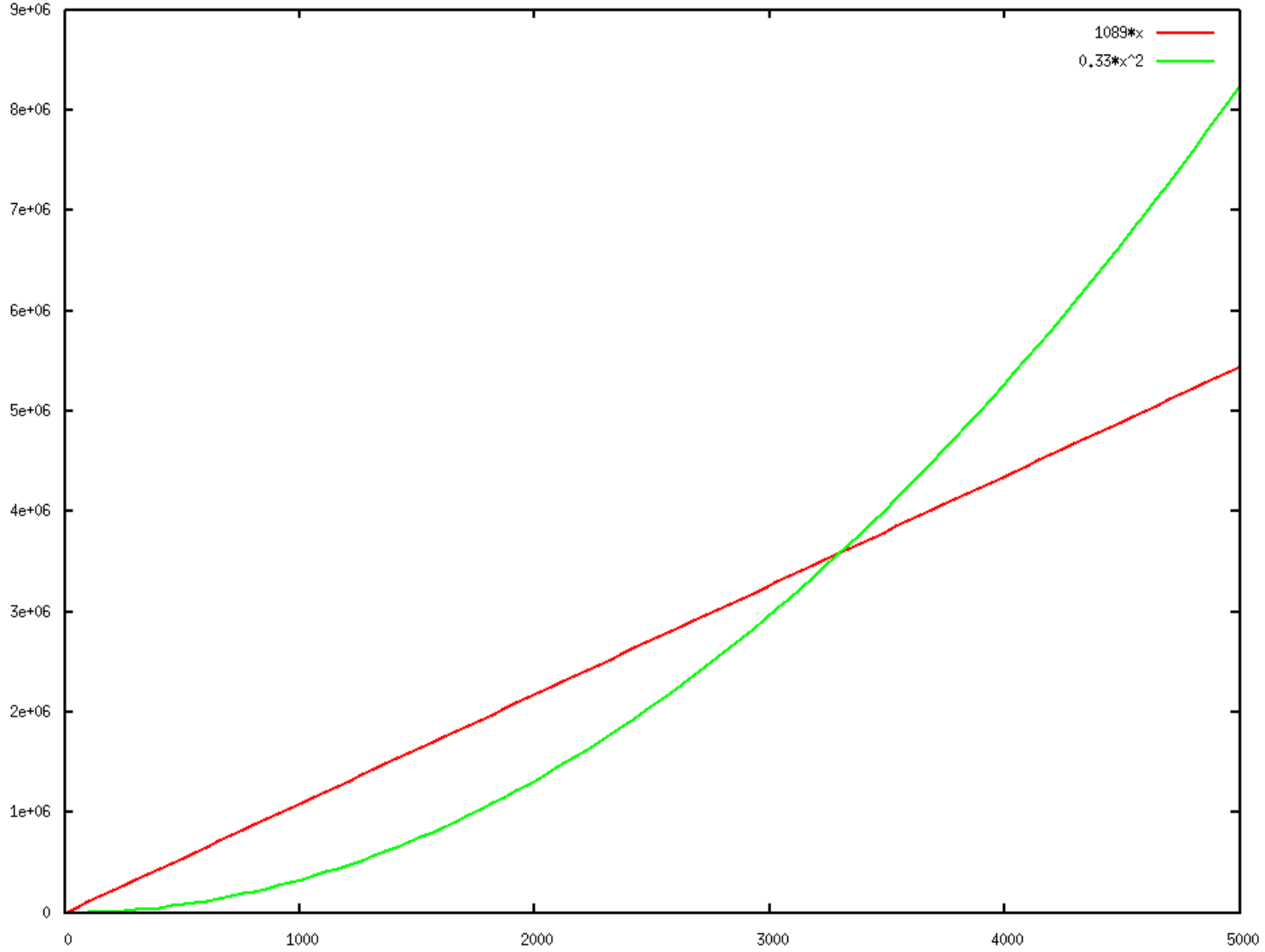
- Grundlæggende antagelse:
  - $\sim n^2$ er bedre end $\sim n^3$
  - Konstanter ikke vigtige
- **Matematisk formel** måde at arbejde med "~"
- Eksempler:

$$87 \cdot n^2 \quad \text{"} \leq \text{"} \quad 12 \cdot n^3$$

$$1089 \cdot n \quad \text{"} \leq \text{"} \quad 0.33 \cdot n^2$$

$$7 \cdot n^2 + 25 \cdot n \quad \text{"} \leq \text{"} \quad n^2$$

$1089 \cdot x$ vs $0.33 \cdot x^2$



O - notation

... og vennerne

Ω (store omega)
Θ (theta)
ω (lille omega)
o (lille o)

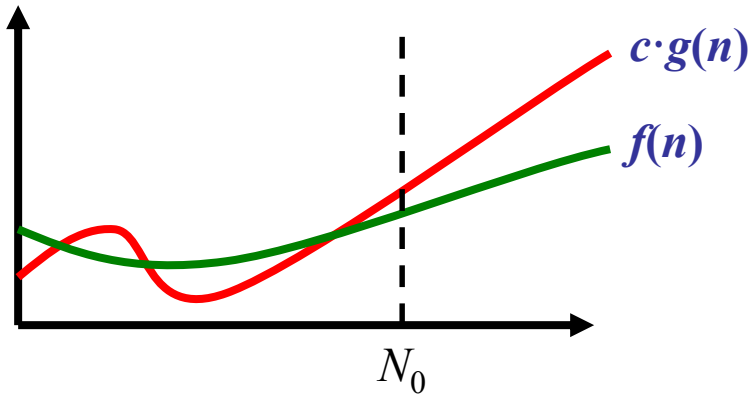
O-notation

Definition: $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Intuitivt: $f(n)$ er ”mindre end er lig med” $g(n)$, eller $g(n)$ ”dominerer” $f(n)$

$10 \cdot n = O(n^2)$?

a) Nej

b) Ja – c=1 og N_0=1

c) Ja – c=10 og N_0=1

d) Ja – c=1 og N_0=10

e) Både c) og d)

f) Ved ikke

O-notation

O($g(n)$) er mængden af funktioner der asymptotisk er begrænset af $g(n)$

Datalogi notation	Matematik notation
$f(n) = O(g(n))$	$f(n) \in O(g(n))$
$O(f(n)) = O(g(n))$	$O(f(n)) \subseteq O(g(n))$
Eksempler: • $n^2 = O(n^3)$ • ~~$O(n^3) = n^2$~~ • $O(n^2) = O(n^3)$ • ~~$O(n^3) = O(n^2)$~~	

Eksempel: Insertion-Sort

```
INSERTION-SORT(A)
1  for j = 2 to A.length
2      key = A[j]
3      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
4      i = j − 1
5      while i > 0 and A[i] > key
6          A[i + 1] = A[i]
7          i = i − 1
8      A[i + 1] = key
```

Tid $O(n^2)$

Eksempler : O - regneregler

$$f(n) = \mathrm{O}(g(n)) \quad \Rightarrow \quad c \cdot f(n) = \mathrm{O}(g(n))$$

$$f_1(n) = \mathrm{O}(g_1(n)) \quad \text{og} \quad f_2(n) = \mathrm{O}(g_2(n)) \quad \Rightarrow$$

$$f_1(n) + f_2(n) = \mathrm{O}(\max(g_1(n), g_2(n)))$$

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = \mathrm{O}(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

$$c_k \cdot n^k + c_{k-1} \cdot n^{k-1} + \cdots + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 = \mathrm{O}(n^k)$$

$f_1(x) = O(g_1(x))$ og $f_2(x) = O(g_2(x))$

gælder så

$f_1(x) - f_2(x) \equiv O(g_1(x) - g_2(x))$?

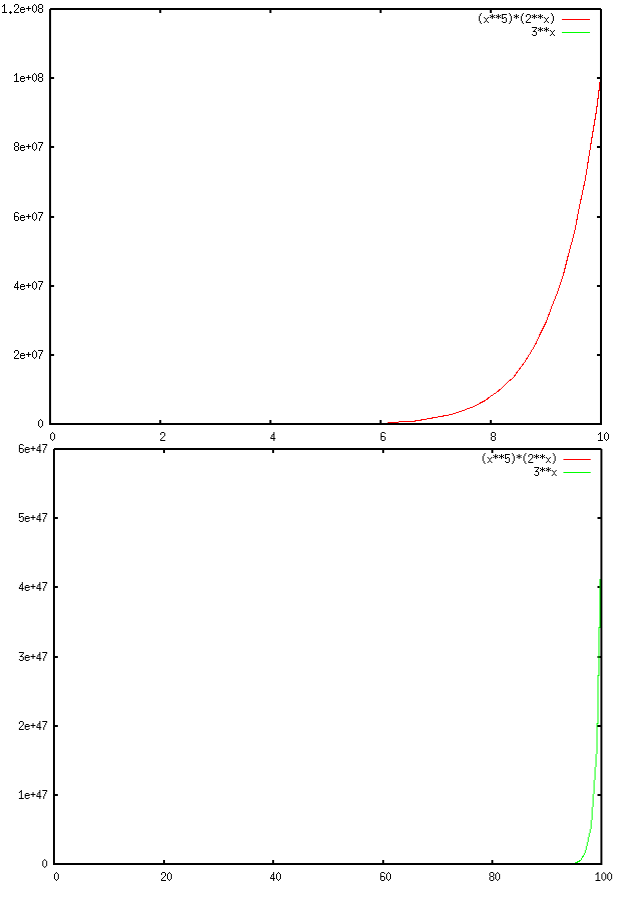
a) Ja
b) Nej
c) Ved ikke

Eksempler : O

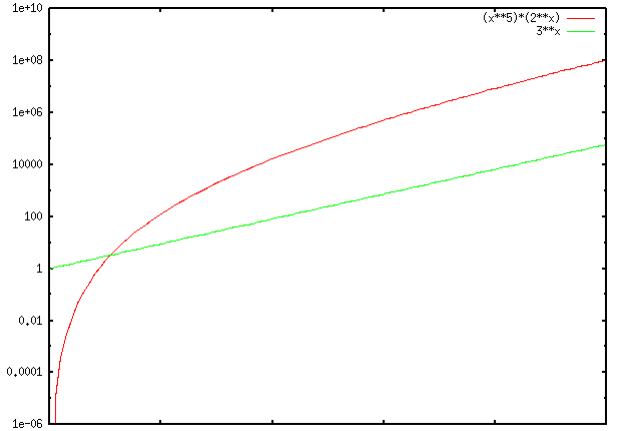
- $3 \cdot n^2 + 7 \cdot n = \mathrm{O}(n^2)$
- $n^2 = \mathrm{O}(n^3)$
- $\log_2 n = \mathrm{O}(n^{0.5})$
- $(\log_2 n)^3 = \mathrm{O}(n^{0.1})$
- $n^2 \cdot \log_2 n + 7 \cdot n^{2.5} = \mathrm{O}(n^{2.5})$
- $2^n = \mathrm{O}(3^n)$
- $n^5 \cdot 2^n = \mathrm{O}(3^n)$

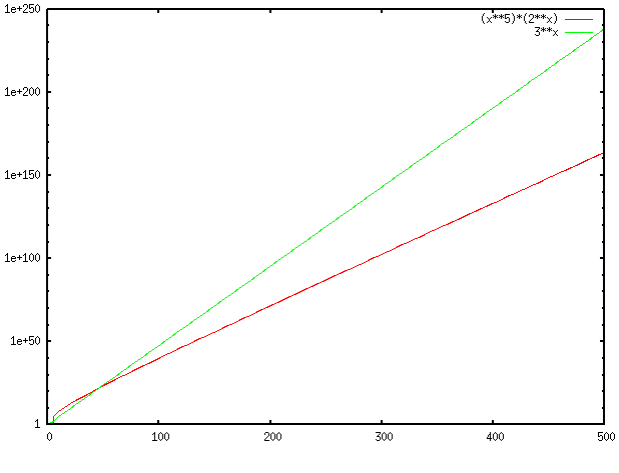
Visuel test af $n^5 \cdot 2^n = \mathrm{O}(3^n)$?

Plot af de to funktioner
– ikke særlig informativ

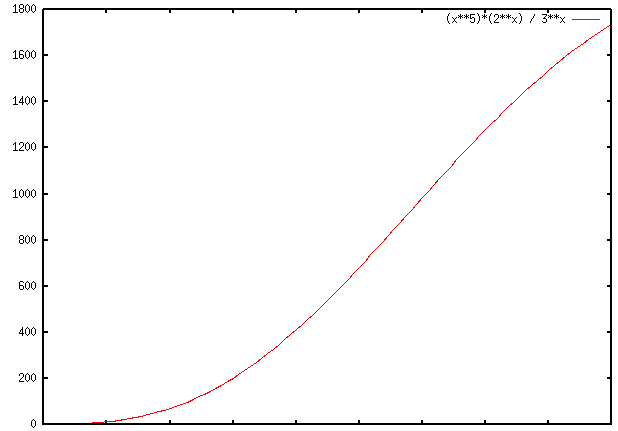


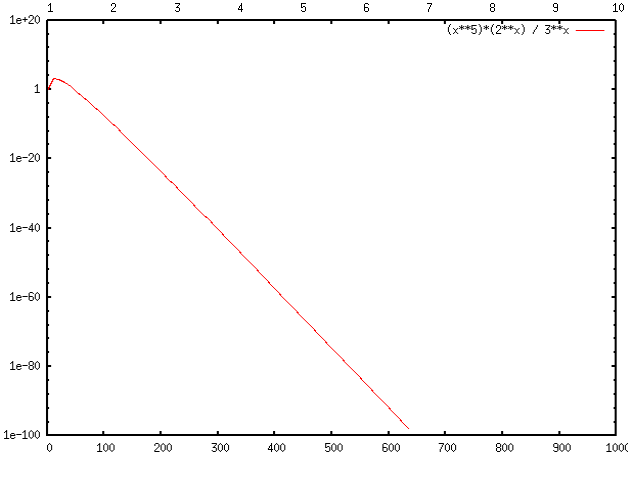
Plot af de to funktioner
med logaritmisk y-akse
– første plot misvisende





Plot af brøken mellem
de to funktioner
– første plot misvisende





Plots lavet med Gnuplot

Bevis for $n^5 \cdot 2^n = \mathrm{O}(3^n)$

Vis $n^5 \cdot 2^n \le c \cdot 3^n$ for $n \ge N_0$ for passende valg af c og N_0

Bevis:

$(5/\log_2 (3/2))^2 \le n$ for $n \ge 73$

$\Downarrow$ $5/\log_2 (3/2) \le \sqrt{n} = n/\sqrt{n} \le n/\log_2 n$ da $\sqrt{n} \ge \log_2 n$ for $n \ge 17$

$\Downarrow$ $5 \cdot \log_2 n \le n \cdot \log_2 (3/2)$

$\Downarrow$ $\log_2 (n^5) \le \log_2 (3/2)^n$

$\Downarrow$ $n^5 \le (3/2)^n = 3^n / 2^n$

$\Downarrow$ $n^5 \cdot 2^n \le 3^n$

Dvs. det ønskede gælder for $c = 1$ og $N_0 = 73$. □

Sætning $\mathrm{poly}(n) \cdot a^n = \mathrm{O}(b^n)$ for alle $1 \le a < b$

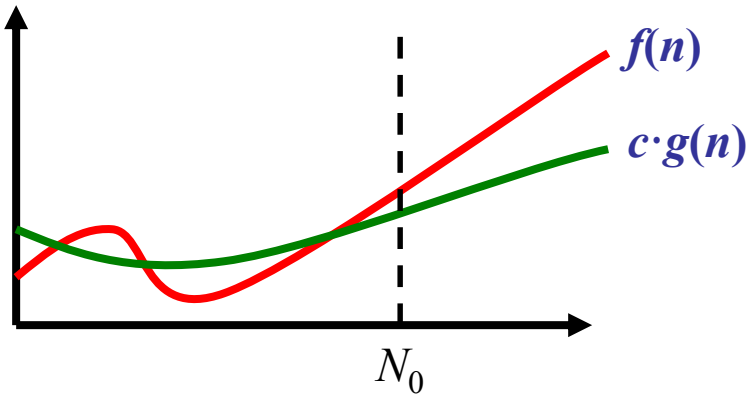
Ω -notation

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

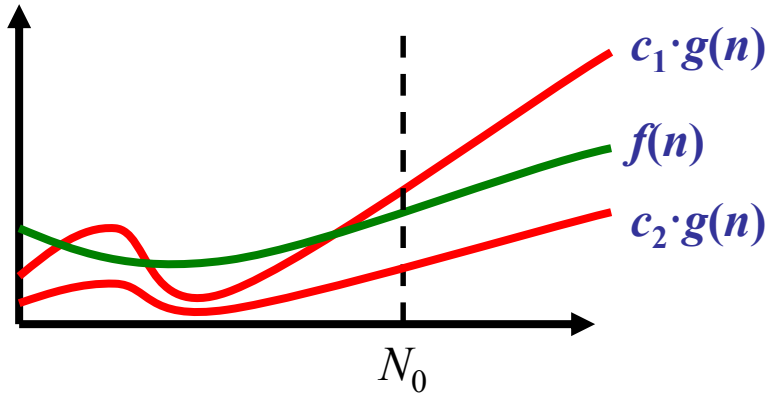


Intuitivt: $f(n)$ er ”større end er lig med” $g(n)$, eller $g(n)$ er ”domineret af” $f(n)$

Θ-notation

Definition: $f(n) = \Theta(g(n))$

hvis $f(n)=O(g(n))$ og $f(n)= \Omega(g(n)$



Intuitivt: $f(n)$ og $g(n)$ er ”assymptotisk ens”

o-notation (lille o)

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Intuitivt: $f(n)$ er ”skarpt mindre end” $g(n)$

ω-notation

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Intuitivt: $f(n)$ er ”skarpt større end” $g(n)$

Algoritme Analyse

- RAM model
- O-notation

... behøver ikke at beskrive og analysere algoritmer i detaljer !