Perspektiverende Datalogi
Klassiske Algoritmer

Gerth Stølting Brodal

Ugens Program

Mandag

12.15-14.00 Introduktion til Algoritmik
Gerth Stølting Brodal

Tirsdag

9.15-12.00 Øvelser - Open Learning Center
12.15-13.00 Opgave 11: Længste voksende delsekvens
Gerth Stølting Brodal
13.15-16.15 Øvelser - Open Learning Center

Onsdag

14.15-16.00 Historisk perspektiv
Erik Meineche Schmidt

Algoritmer

Algoritme Klart beskrevet metode til løsning af en opgave

Eksempler

2 dl havregryn
4 dl vand
Hæld alt i gryde.
Kog 3 min.
Smag til med salt.

Madopskrift

50-35-30 g Tvinni
to-trådet grøn
Pinde nr. 3

Slå 38-28-20 m op,
strik 4-3-3 p glatstr,
start med r p. Lav
raglan-indtag 2 r 2
dr r sm.

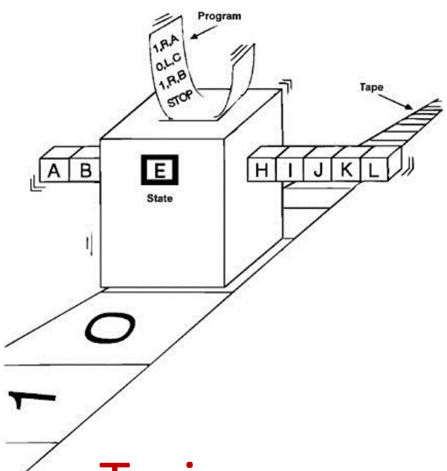
Strikkeopskrift

```
int i,k;
for (i=0;i<N;i++){
    C[A[i]]++;
    k = k+i;
}
```

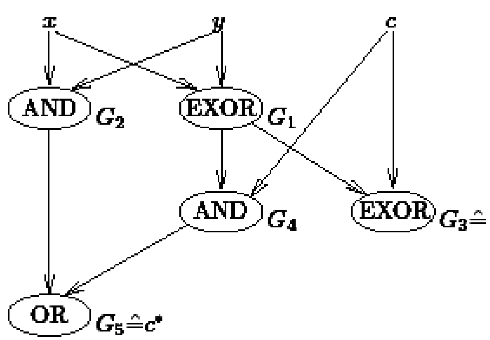
Computerprogram

Beregningsmodeller

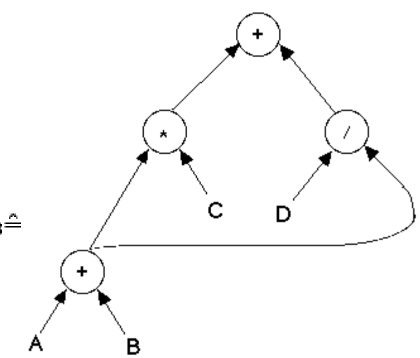
Formel model: Beskriver præcis hvad en algoritme kan gøre, præcis definition af resourceforbrug



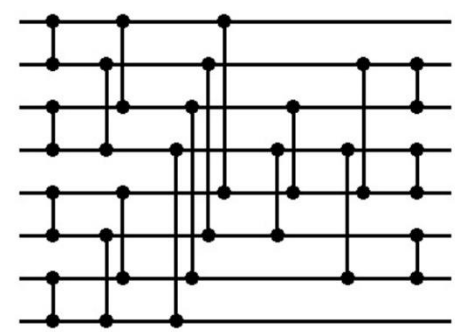
Turing maskine



Boolske netværk



Aritmetiske netværk



Sorterings netværk

(Øvelse 6)

Algoritmik

= designe og analysere algoritmer

Kvalitet af algoritme:

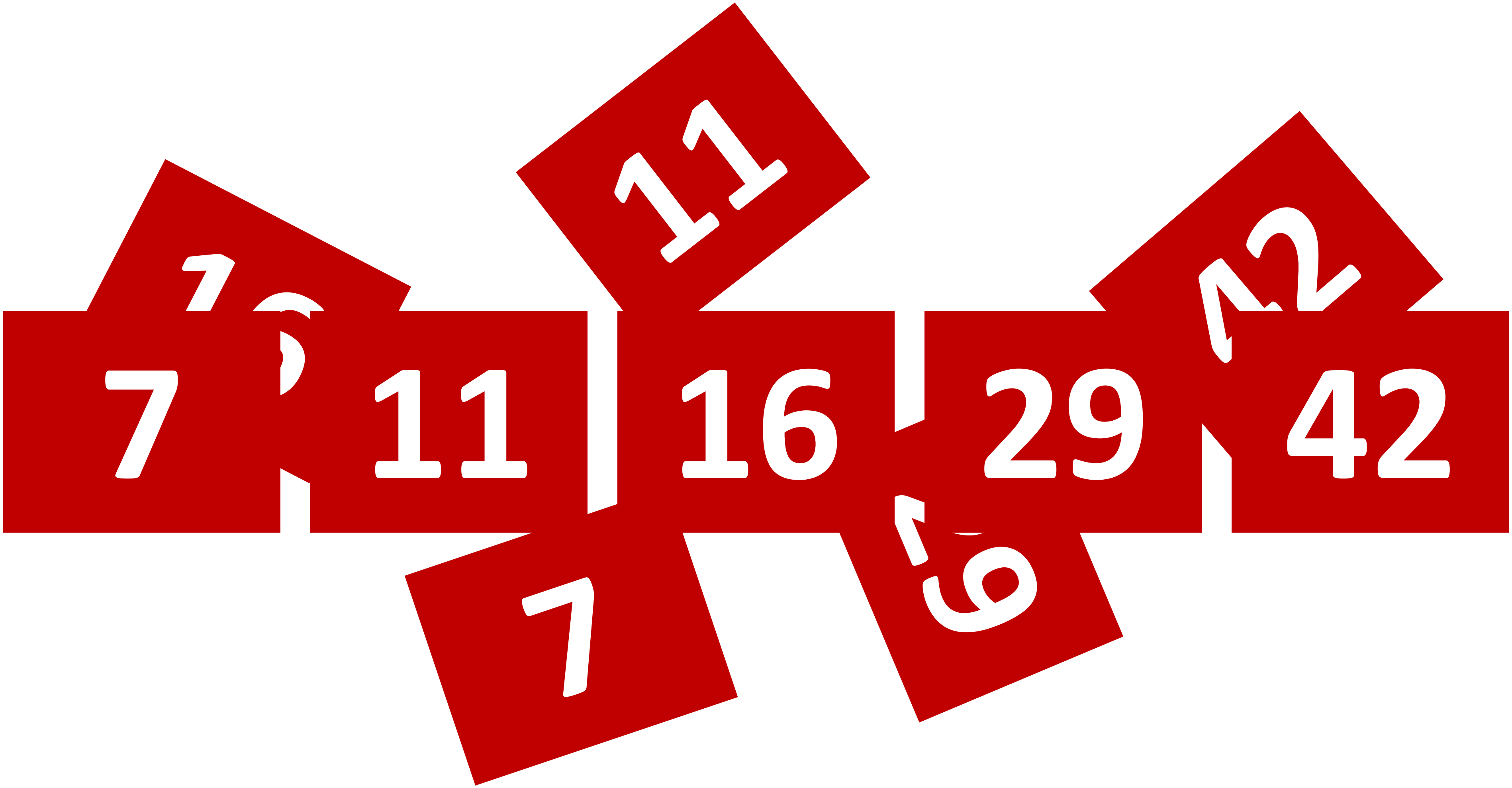
- Korrekt, d.v.s. løser bevisligt problemet
- Effektiv - lavt ressourceforbrug, f.eks.
  – Tid
  – Plads
- Nem at programmere
- Problem-specifikke egenskaber

Søgning i Sorteret Liste

3	7	9	11	13	27	33	37	42	89

$1 + \lceil \log_2 n \rceil$ sammenligninger

Sortering



(Øvelser 1-10)

Begreber

- Analyse af algoritme
  - **assymptotisk tid**
  - **øvre grænse**
  - **worst-case**
  - **best-case**
- Analyse af problem
  - **nedre grænse** (alle algoritmer tager lang tid)
  - **adversary/modspiller** (strategi for at finde et dårligt input for en given algoritme)
- Modeller
  - **sorteringsnetværk** **(øvelser 6)**
  - **beslutningstræer** **(øvelser 9)**

Matematik repetition

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+4+\cdots+2^{k-1}+2^{k}=2^{k+1}-1$$

x	1	2	4	8	$\cdots$	64	$\cdots$	80	$\cdots$	128	$\cdots$
$\log_2(x)$	0	1	2	3		6		6.3219		7	

$2^6 = 64$

$$y=\log_2(x) \iff x=2^{y}$$

$$\log_2(x\cdot y)=\log_2(x)+\log_2(y)$$

$$\log(x) = \log_2(x)$$

$$\log(x) \neq \log_{10}(x)$$

$$\log(x) \neq \log_e(x) = \ln(x)$$

NB: Ascii notation ofte 2^3=2^3

NB: I datalogi...

Husk

Hver læsegruppe skal tirsdag medbringe: en **saks**, to-tre **ure** med sekundvisere, **skriveredskaber** og lidt kladdepapir, evt. en **lommeregner** (gerne grafisk)





og/eller

Indhold

- **Eksempler på beregningsproblemer**
- Algoritmer og deres analyse
  - Korrekthed af algoritmer
  - Ressourceforbrug for algoritmer
- Kompleksitet af beregningsproblemer

Beregningsproblemer

- Sortering
- Søgning
- Grafer
- Strenge
- Geometri
- Numeriske beregninger
- Kombinatorisk optimering
- …

Sortering

- **Problem** Stil en mængde elementer i orden

110 755 766 51 652 28 729 713 681 407

$$\Downarrow$$

28 51 110 407 652 681 713 729 755 766

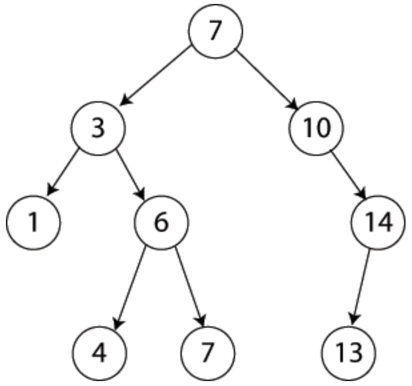
- Data er meget bekvemmere hvis de er sorterede. Specielt er det nemmere at lede i dem (ordbøger, telefonbøger, eksamensopslag, ...)
- Brugt som rutine i mange andre algoritmer
- Meget velstuderet problem
- Mange algoritmer (øvelser 1-10 + QuickSort + . . .)

Søgning

- **Problem**: Gem data så de kan findes igen effektivt

Find(x)
Insert(x)
Delete(x)
Successor(x), RangeSearch(x_1, x_2), ...

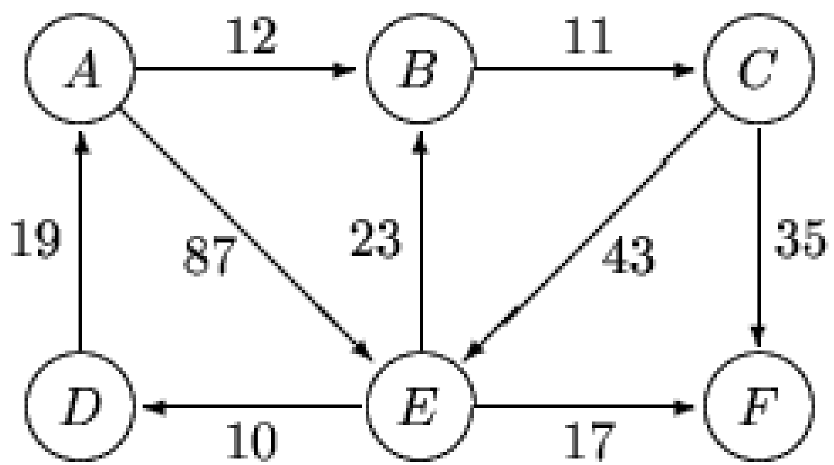
- Et andet meget fundamentalt problem (jvf. databaser)
- Brugt som rutine i mange andre algoritmer
- Meget velstuderet, mange algoritmer
- To grundgrupper: søgetræer og hashing



Grafer

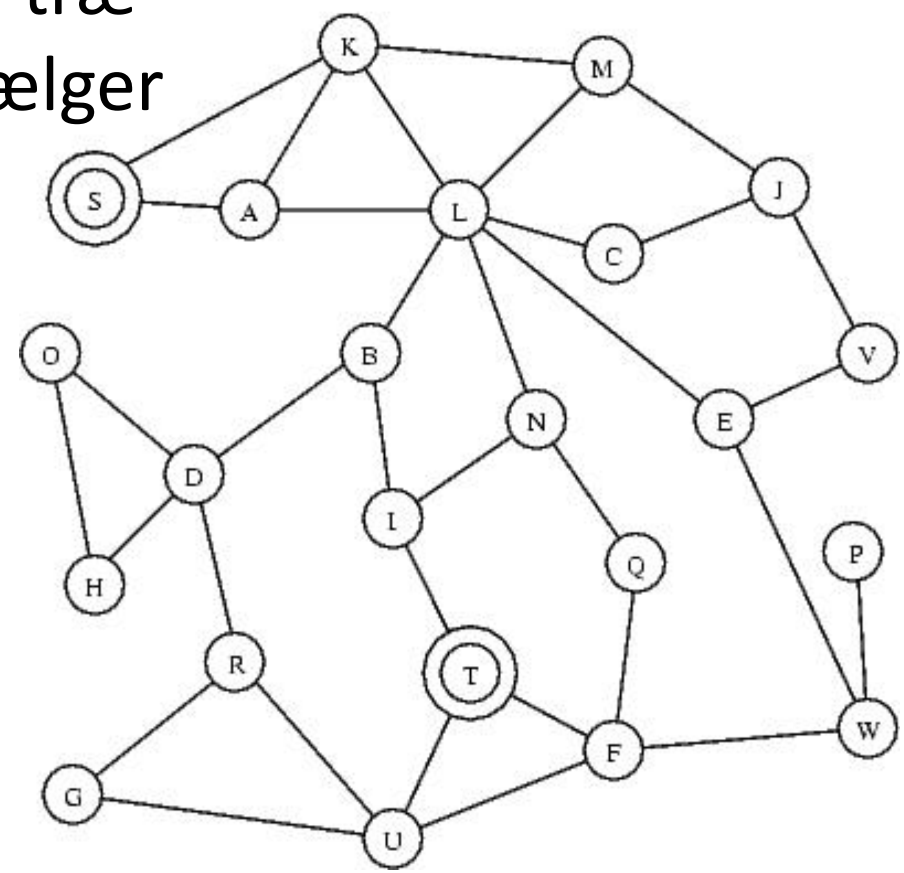
- **Knuder** (punkter) og **kanter** (streger mellem punkter)
- Ekstra struktur: **orientering** af kanter, **vægte** på kanter
- En *meget* anvendt model:

  Flyruter, veje, el/vand/computer netværk, bekendtskaber og andre relationer, weblinks, ...



Problemer på grafer

- Løb grafen igennem (besøge alle knuder)
- Sammenhæng, k-sammenhæng
- (Mindste) udspændende træ
- Hamilton tur, rejsende sælger
- Korteste veje
- Euler tur
- Graffarvning
- Klike
- …



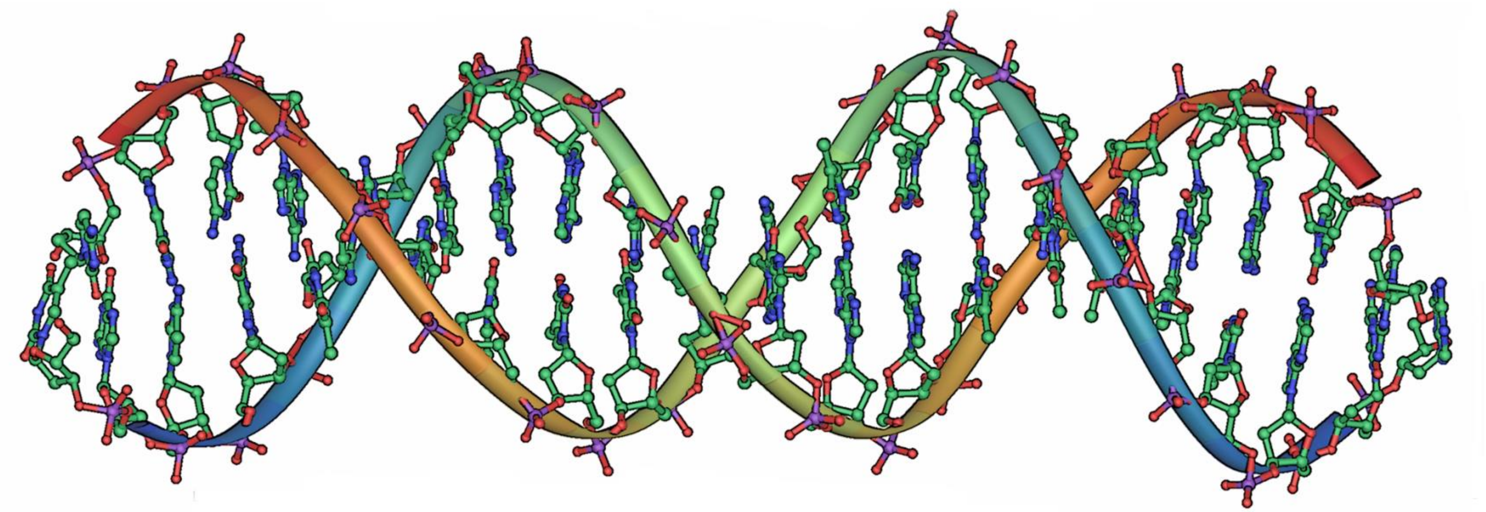
Strenge

- **Alfabet** = mængde af tegn som kan bruges
- **Streng** = sekvens af tegn fra alfabetet
- Eksempler:

"To be or not to be"

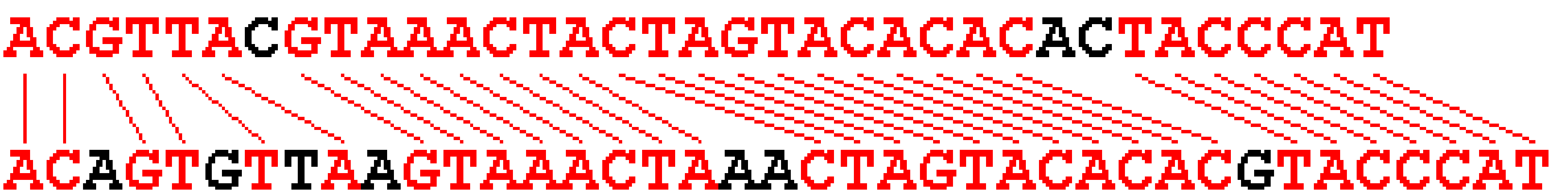
10001100110001110

ACCCATTCCGTAA



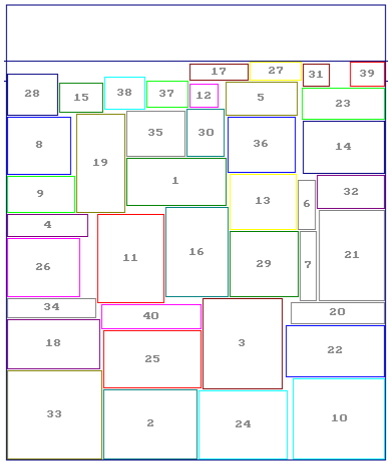
Problemer på Strenge

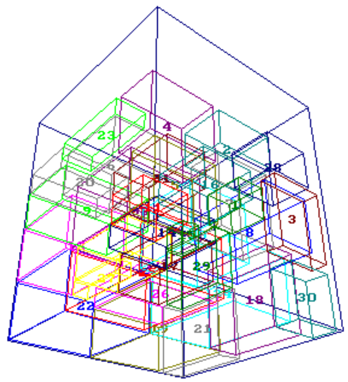
- Mønster genkendelse
- Regulære udtryk
- Afstandsmål (Hamming, edit)
- Længste fælles delstreng
- Længste fælles delsekvens
- …



Kombinatorisk Optimering

- Spande pakning (1D, 2D, 3D)



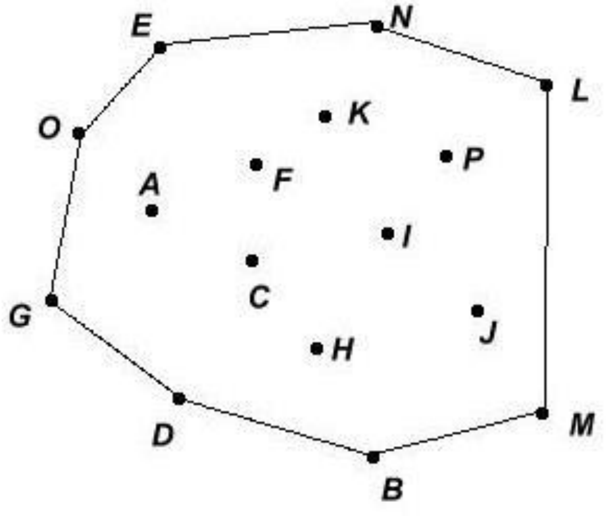


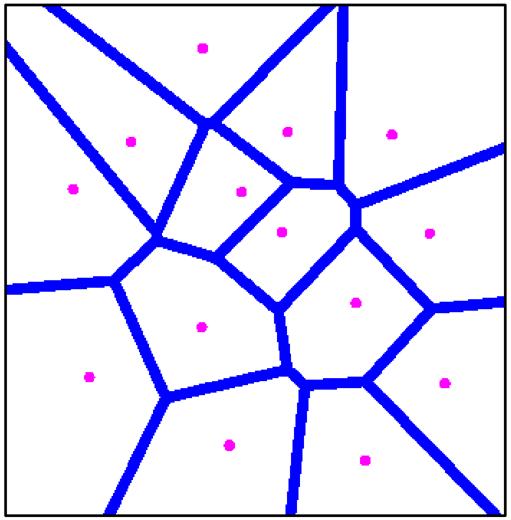
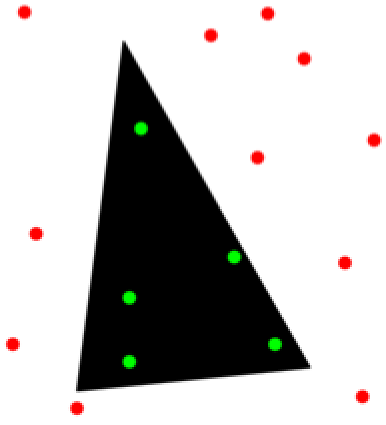

Ferie
Flyrejser
- en rejse i Maya'ernes rige -
Klassiske Mexico
- Faraoernes rige -
Ægypten
Spændende kulturelle perler:
Vietnam og Cambodia
Indigo Rejser
7023 0733 • indigorejser.dk
Rundrejser på egen hånd
Mexico
kr. 12.440,-
Cuba
kr. 18.290,-
Sydafrika
kr. 15.755,-
USA
kr. 17.000,-
NYHAVN REJSER
Storby-ferie på egen hånd
Kvalitetsrejser med dansk rejseleder
Irland
Provence
Tog i Schweiz
Berlin
Piemonte/Barolo
Prag
Rom
MALAGA
Bravo Tours
96 27 09 55
Rødehavet bedst & billigst
ATLANTIS REJSER
CHARTERFERIE FOR HELE FAMILIEN
SUN TOURS
AUGUST UDSALG!
FALK LAURITSEN
SJOV I EFTERÅRSFERIEN
Gratis for børn under 7 år!
Voksen: fra 2.473,-
Børn u/7 år: GRATIS
Bestil på tlf. 70 11 60 11
eller på www.fdm-travel.dk/disney
Jordans højdepunkter
Ægypten Specialisten
Grækenland & Cruise
AB Travel
PARIS
2.645
CYPERN
OPLEV TOSCANA!
Gislev
HEKLA
vær d at vide?

- Rygsæk
- Delmængde sum
- Job-skemaplanlægning
- Crew-skemaplanlægning
- …

Geometri

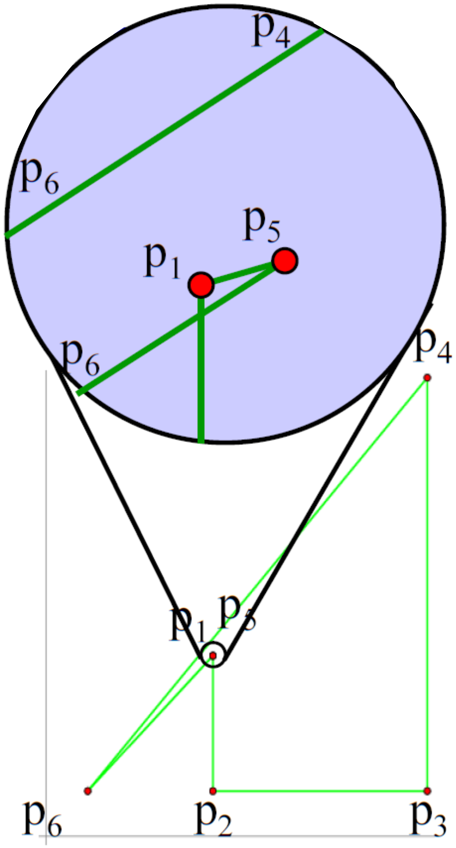
- Konvekse hylster
- Nærmeste naboer
- Krydsninger af ortogonale linjesegmenter
- 2D område søgninger
- …



Numeriske Beregninger

- Polynomieevaluering
- Matrixmultiplikation
- Løsning af ligningssystemer
- Løsning af differentialligninger
- …



(6/7-1)*7+1 = -4.4408920985006e-16 **?**

Indhold

- Eksempler på beregningsproblemer
- Algoritmer og deres analyse
  - **Korrekthed af algoritmer**
  - Ressourceforbrug for algoritmer
- Kompleksitet af beregningsproblemer

Invarianter

Udsagn *I* som gælder efter alle skridt i algoritmen

Vælges så:

- Man kan vise at ***I*** gælder ved **starten**
- Man kan vise at hvis ***I*** gælder før et **skridt**, så gælder det efter
- Man kan vise af ***I*** samt omstændigheder ved algoritmens **afslutning** implicerer det ønskede slutresultat

Eksempler: Binær søgning, RadixSort (øvelse 7), ...

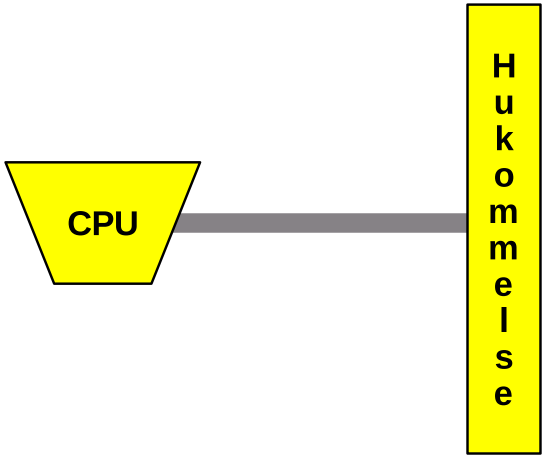
3	7	9	11	13	27	33	37	42	89

Indhold

- Eksempler på beregningsproblemer
- Algoritmer og deres analyse
  - Korrekthed af algoritmer
  - **Ressourceforbrug for algoritmer**
- Kompleksitet af beregningsproblemer

Ressourceforbrug, målestok

- RAM-modellen
- Tidsmåling vs. analyse
- Voksehastighed, asymptotisk notation
- Worst case, best case, average case
- …



Først vælge (eller designe) algoritme efter forskelle i **asymptotisk ressourceforbrug**

Ved lighed, vælg **dernæst** efter **konstanter** (tidsmåling nu relevant)

Indhold

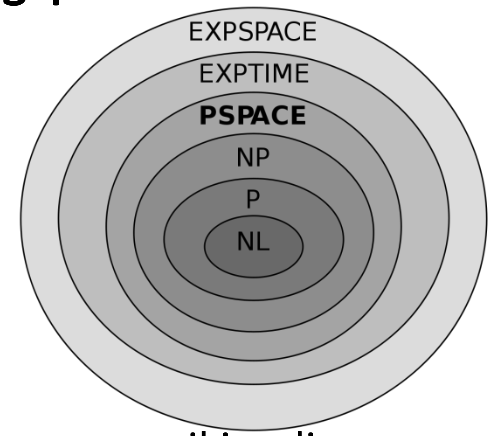
- Eksempler på beregningsproblemer
- Algoritmer og deres analyse
  - Korrekthed af algoritmer
  - Ressourceforbrug for algoritmer
- **Kompleksitet af beregningsproblemer**

Kompleksitet

Kompleksitetsteori
= studere problemers iboende sværhedsgrad

Kompleksitetsklasser:

Klasse(**X**,**Y**) = De problemer, som kan løses i model **X** med ressourceforbrug **Y**.



wikipedia.org

Mål

Øvre grænser (d.v.s. algoritmer) og **nedre grænser** (d.v.s. beviser for at ingen algoritme i model **X** kan løse problemet med ressourceforbrug mindre end **Y**).

Nedre Grænser

- Beviser for at **ingen** algoritme (blandt en stor klasse af algoritmer for en given beregnings-model) kan løse problemet bedre end angivet

- Eksempler: Søgning og Sortering

Øvre og nedre grænser ens

$\Downarrow$

problemets kompleksitet kendt

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{EXP}$

Meget grov inddeling af algoritmer i gode og dårlige:

- P = problemer med polynomiel tids algoritme

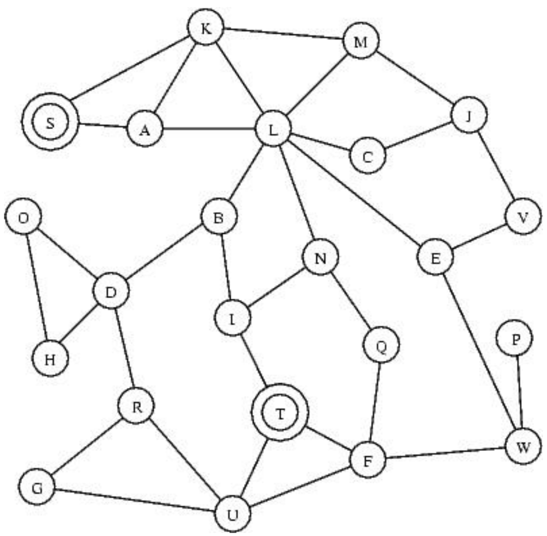
v.s.

- EXP = problemer med eksponentiel tids algoritme

Eksempel: sortering vs. brute-force løsning af puslespil
(øvelse 17)

NP

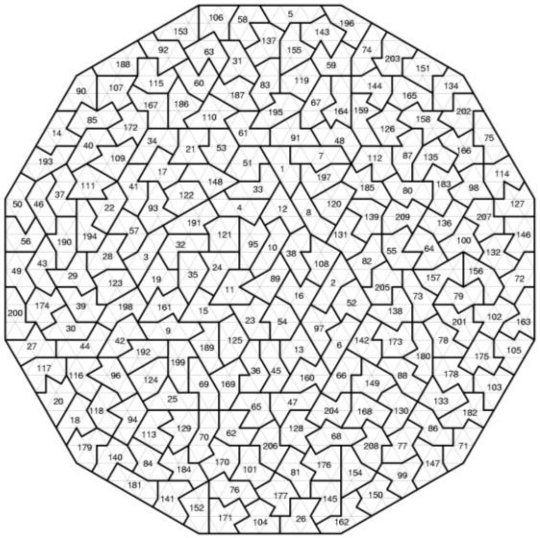
- NP = ja/nej-problemer, hvor en ja-**løsning kan kontrolleres** (men ikke nødvendigvis findes) i polynomiel tid
- Eksempel: Hamilton tur



- Det er nemt at se at P $\subseteq$ NP $\subseteq$ EXP
- Formodning: P $\subset$ NP

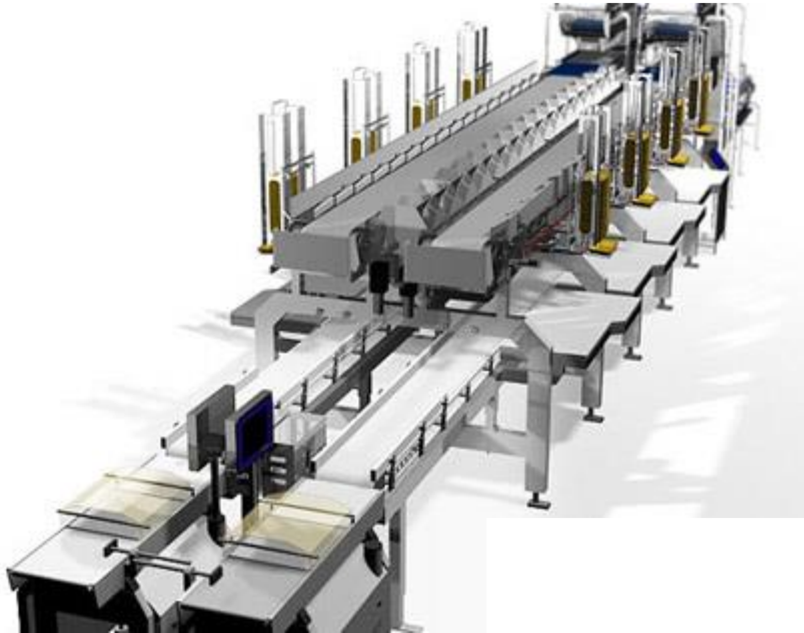
Hvis ingen polynomiel algoritme...

- Heuristisk søgning
- Algoritmer for specielle instanser (jvf. “The Eternity Puzzle”)
- Approximationsalgoritmer



Flere modeller og cost-funktioner

- Online algoritmer
- Randomiserede algoritmer
- Parallelisme
- Hukommelseshierarkier
- …

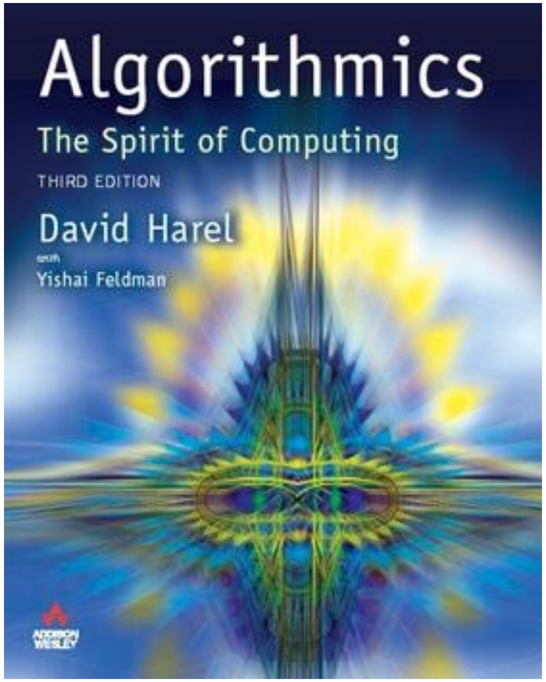


Algoritmik

- Designe algoritmer
- Analysere algoritmer
- Analysere problemer

David Harel

*"Algorithmics is more than a branch of computer science. It is the **core of computer science**, and, in all fairness, can be said to be relevant to most of science, business, and technology."*



Øvelse 11 (Længste voksende delsekvens)

Betragt følgende liste af tal.

30 83 73 80 59 63 41 78 68 82 53 31 22 74 6 36 99 57 43 60

Øvelsen er at slette så få af disse tal som muligt, så de resterende tal står i voksende orden. Hvis for eksempel alt på nær de første to tal slettes, har man en voksende følge tilbage af længde 2 (**30 83**). Ved at slette alt på nær det første, tredie, ottende og tiende opnår man det samme, men har slettet færre tal og har en voksende følge tilbage af længde 4 (**30 73 78 82**).

Spørgsmål

Hvor lang er den længste voksende følge man kan opnå ?