

Algoritmer og Datastrukturer

Del-og-kombiner

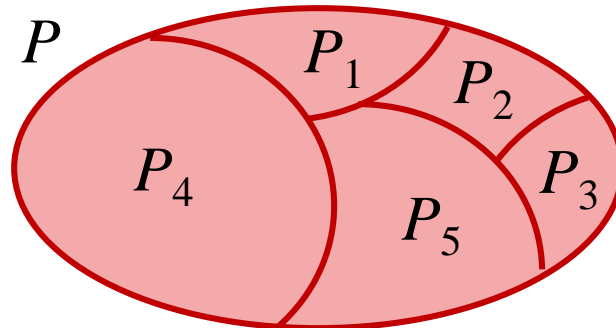
[CLRS, kapitel 2.3, 4.2-4.5, problem 30.1.c]

Del-og-Kombiner

Algoritme design teknik

Virker for mange problemer (men langt fra alle)

- **Opdel** et problem P i mindre problemer P_1, \dots, P_k , der kan løses uafhængigt (små problemer løses direkte)
- Løs delproblemerne P_1, \dots, P_k **rekursivt**
- **Kombiner** løsningerne for P_1, \dots, P_k til en løsning for P



Eksempel: Merge-Sort

MERGE-SORT(A, p, r)

① To mindre delproblemer

if $p < r$

$q = \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$

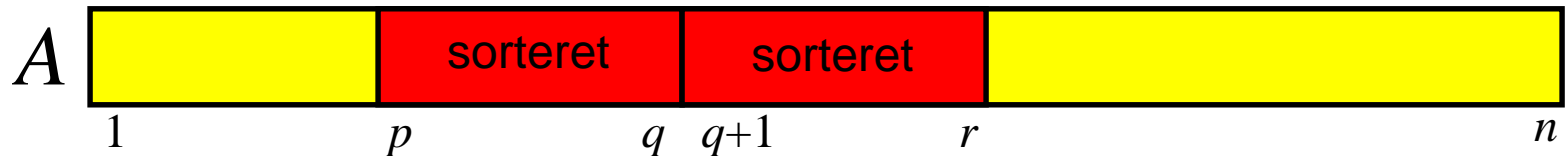
② Løs rekursivt

MERGE-SORT(A, p, q)

MERGE-SORT($A, q + 1, r$)

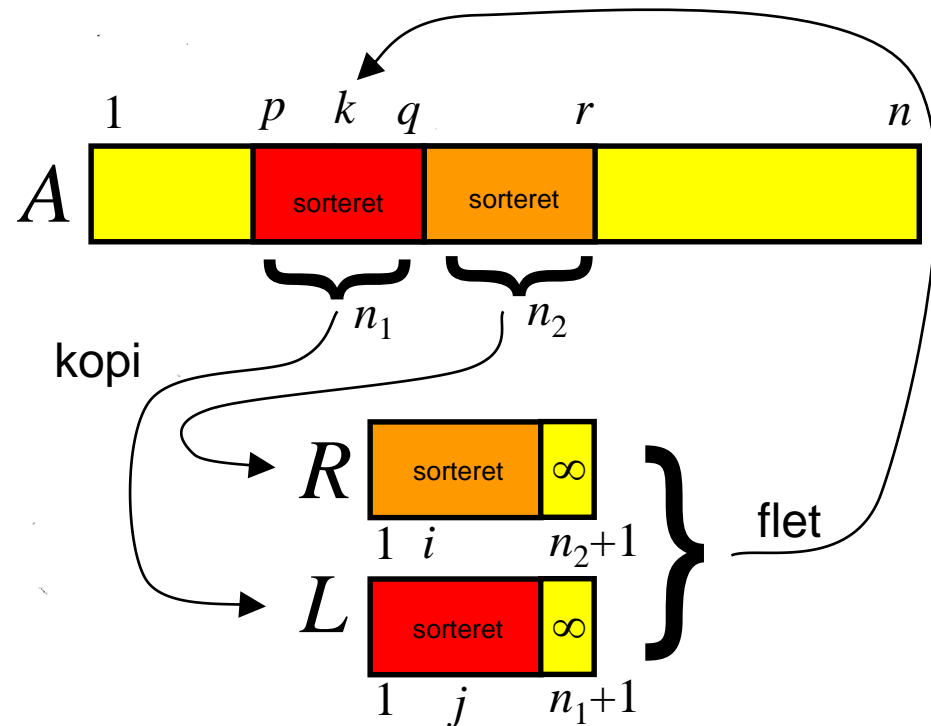
③ Kombiner

MERGE(A, p, q, r)



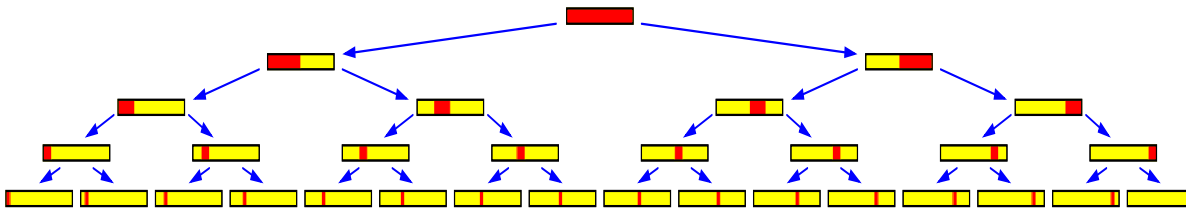
MERGE(A, p, q, r)

```
1   $n_1 = q - p + 1$ 
2   $n_2 = r - q$ 
3  let  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$  be new arrays
4  for  $i = 1$  to  $n_1$ 
5       $L[i] = A[p + i - 1]$ 
6  for  $j = 1$  to  $n_2$ 
7       $R[j] = A[q + j]$ 
8   $L[n_1 + 1] = \infty$ 
9   $R[n_2 + 1] = \infty$ 
10  $i = 1$ 
11  $j = 1$ 
12 for  $k = p$  to  $r$ 
13     if  $L[i] \leq R[j]$ 
14          $A[k] = L[i]$ 
15          $i = i + 1$ 
16     else  $A[k] = R[j]$ 
17          $j = j + 1$ 
```



Merge-Sort : Analyse

Rekursionstræet



Observation

Samlet arbejde per lag er $O(n)$

Arbejde

$$O(n \cdot \# \text{ lag}) = O(n \cdot \log_2 n)$$

Del-og-kombiner, FADS eksempler:

- **MergeSort**
 - Del op i to lige store dele
 - Rekursiv sortering
 - Kombiner = fletning
- **QuickSort**
 - Opdel efter tilfældigt pivot (**tilfældig opdeling**)
 - Rekursiv sortering
 - Kombiner = ingen (konkatener venstre og højre)
- **QuickSelect**
 - Opdel efter tilfældigt pivot (**tilfældig opdeling**)
 - Rekursiv select
 - Kombiner = ingen

Analyse af Del-og-Kombiner

= analyse af en rekursiv procedure

Essentielt to forskellige måder:

1. Argumenter direkte om **rekursionstræet** (analyser dybde, #knuder på hvert niveau, arbejde i knuderne/niveauerne/træet)
2. Løs en matematisk **rekursionsligning**, f.eks.

$$T(n) \leq a$$

hvis $n \leq c$

$$T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + a \cdot n$$

ellers

Bevises f.eks. vha. induktion.

Hvad er rekursionsformlen for MergeSort hvor man sorterer rekursivt 3 dele af størrelse $n/3$?



For $n \geq 3 \dots$

a) $T(n) \leq 3 \cdot T(n) + a \cdot n^3$

b) $T(n) \leq 3 \cdot T(n) + a \cdot n$

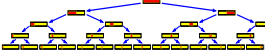
c) $T(n) \leq 3 \cdot T(n/3) + a \cdot n$

d) $T(n) \leq 3 \cdot T(n/2) + a \cdot n$

e) Ved ikke

\dots og $T(n) \leq c$ for $n < 3$

Løsning af rekursionsligninger

- Fold rekursionsligningen ud og argumenter om **rekursionstræet** 
- Gæt en løsning og vis den ved induktion efter voksende n

$$T(n) \leq a$$

hvis $n \leq c$

$$T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + a \cdot n$$

ellers

Rekursionsligninger: Faldgrubber

- Ulige opdelinger glemmes (n ulige, så er de rekursive kald typisk $\lfloor n/2 \rfloor$ og $\lceil n/2 \rceil$)

[CLRS, kapitel 4.6.2]

- Analyserer typiske kun for $n = 2^k$
- Brug **aldrig** O-udtryk i rekursionsformlen – brug konstanter (~~$T(n) = O(n) + O(T(n/3))$~~)

$$T(n) \leq c \cdot n + a \cdot T(n/3)$$

Master Theorem

(Simplificering af [CLRS, Theorem 4.1])

Theorem

Hvis a, b, c, d, p er konstanter som opfylder $a, c, p > 0$, $d \geq 1$, og $b > 1$, så har rekursionsligningen

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n \leq d \\ a \cdot T(n/b) + c \cdot n^p & \text{hvis } n > d \end{cases}$$

følgende løsning

$$\begin{array}{ll} \Theta(n^p) & \text{hvis } a < b^p \\ \Theta(n^p \log n) & \text{hvis } a = b^p \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{hvis } a > b^p \end{array}$$

Løsning til rekursionsligningen?

$$\begin{array}{ll} T(n) \leq 4 \cdot T(n/2) + n^3 & \text{for } n > 1 \\ T(n) \leq c & \text{for } n = 1 \end{array}$$

- a) $T(n) = O(n^3)$
- b) $T(n) = O(n^3 \log n)$
- c) $T(n) = O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$
- d) Ved ikke

Løsning til rekursionsligningen?

$$T(n) \leq 4 \cdot T(n/2) + n \quad \text{for } n > 1$$

$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$

- a) $T(n) = O(n)$
- b) $T(n) = O(n \log n)$
- c) $T(n) = O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$
- d) Ved ikke

Løsning til rekursionsligningen?

$$T(n) \leq 5 \cdot T(n/4) + n^2 \quad \text{for } n > 1$$

$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$

a) $T(n) = O(n^2)$

b) $T(n) = O(n^2 \log n)$

c) $T(n) = O(n^{\log_4 5}) = O(n^{1.161})$

d) Ved ikke

Løsning til rekursionsligningen?

$$T(n) \leq 9 \cdot T(n/3) + n^2 \quad \text{for } n > 1$$

$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$

a) $T(n) = O(n^2)$

b) $T(n) = O(n^2 \log n)$

c) $T(n) = O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$

d) Ved ikke

Løsning til rekursionsligningen?

$$T(n) \leq 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2 \quad \text{for } n \geq 2$$

$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$

- a) $T(n) = O(n^2)$
- b) $T(n) = O(n^2 \cdot \log n)$
- c) $T(n) = O(n^{7/2})$
- d) $T(n) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})$
- e) $T(n) = O(n^7)$
- f) Ved ikke

Dybden af rekursionen?

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{hvis } n \leq d \\ a \cdot T(n/b) + c \cdot n^p & \text{hvis } n > d \end{cases}$$

a) $\log n$

b) $\log_b n$

c) $\log_b (n/d)$

d) $\log_d (n/b)$

e) Ved ikke

Dybde	$i = 0.. \log_b(n/d) - 1$	$\log_b(n/d)$
# delproblemer	a^i	$a^{\log_b(n/d)}$
Størrelse af delproblemer	n/b^i	d
Tid per delproblem	$c \cdot (n/b^i)^p$	c
Tid per lag	$a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^p$	$c \cdot a^{\log_b(n/d)}$

$$T(n) = \Theta \left(c \cdot a^{\log_b(n/d)} + \sum_{i=0}^{\log_b(n/d)-1} a^i \cdot c \cdot (n/b^i)^p \right)$$

(bunden af rekursionen) (lag $i = 0.. \log_b(n/d) - 1$)

$$= \Theta \left(c \cdot a^{\log_b n} + c \cdot n^p \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} (a/b^p)^i \right)$$

$$\frac{(a/b^p)^{\log_b n} - 1}{a/b^p - 1} \quad \text{for } a \neq b^p$$

$$= \Theta \left(n^{\log_b a} + n^p \cdot \begin{cases} 1 & \text{for } a < b^p \\ \log n & \text{for } a = b^p \\ (a/b^p)^{\log_b n} & \text{for } a > b^p \end{cases} \right) = \Theta \left(\begin{cases} n^p & \text{for } a < b^p \\ n^p \cdot \log n & \text{for } a = b^p \\ n^{\log_b a} & \text{for } a > b^p \end{cases} \right)$$

$$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

$$(b^p)^{\log_b n} = n^p$$

Multiplikation af lange heltal

[CLRS, problem 30.1.c]

Karatsuba 1960

- I og J hver heltal med n bits
- Naive implementation kræver $O(n^2)$ bit operationer
- Lad $I = I_h \cdot 2^{n/2} + I_l$ og $J = J_h \cdot 2^{n/2} + J_l$
- $I \cdot J = I_h \cdot J_h \cdot 2^n + ((I_h - I_l) \cdot (J_l - J_h) + I_l \cdot J_l + I_h \cdot J_h) \cdot 2^{n/2} + I_l \cdot J_l$

$$T(n) \leq 3 \cdot T(n/2) + c \cdot n \quad \text{for } n \geq 2$$

$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$

- $T(n) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.58})$

Multiplikation af lange heltal

$$I = \begin{array}{|c|c|} \hline I_h & I_l \\ \hline \end{array} \quad J = \begin{array}{|c|c|} \hline J_h & J_l \\ \hline \end{array}$$

$\overbrace{\hspace{2cm}}^{n/2}$

$$I \cdot J = I_h \cdot J_h \cdot 2^n + (I_h \cdot J_l + I_l \cdot J_h) \cdot 2^{n/2} + I_l \cdot J_l$$

a) $T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + a \cdot n^2$

b) $T(n) \leq 4 \cdot T(n/4) + a \cdot n$

c) $T(n) \leq 4 \cdot T(n/2) + a \cdot n$

d) $T(n) \leq 4 \cdot T(n/2) + a \cdot n^2$

e) Ved ikke

... og $T(N) \leq c$ for $n = 1$

Multiplikation af lange heltal

+4000 år	$O(n^2)$
Del-og-kombiner Karatsuba 1960	$O(n^{\log_2 3})$
Schönhage-Strassen 1971	$O(n \cdot \log n \cdot \log \log n)$
Fürer 2007 Harvey, Hoeven 2018 Harvey, Hoeven 2019	$O(n \cdot \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$ $O(n \cdot \log n \cdot 2^{2 \cdot \log^* n})$ $O(n \cdot \log n)$

Ikke pensum: Karatsuba har skrevet en artikel om historien af multiplikation.

- Anatolii A. Karatsuba: [The Complexity of Computations](#), Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 1995, vol. 211, 169–183 ([russisk original](#))

Matricer

$m = 3$
søjler / kolonner

$n = 4$
rækker

repræsenterer
lineær transformation $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 + 4x_3 \\ 7x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$n \times m$ matrix

søjlevektor
 $m \times 1$ matrix

søjlevektor
 $n \times 1$ matrix

Regneregler

Matrix addition
($n \times m$ matricer)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$A + B = B + A$$

Matrix subtraktion
($n \times m$ matricer)

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - (B + C) = (A - B) - C$$

Multiplikation med
konstant

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 9 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c(dA) = (cd)A$$

$$c(A + B) = (cA) + (cB)$$

Matrix Multiplikation

= komposition af lineære transformationer

$$\begin{matrix} & & & j \\ & & & \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{array} \right) \\ i & \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right) & = & i \left(\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{array} \right) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{n \times m \text{ matrix}} & \underbrace{\hspace{10em}}_{m \times p \text{ matrix}} & \underbrace{\hspace{10em}}_{n \times p \text{ matrix}} \end{matrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1..m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Regneregler

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = (AB) + (AC)$$

$$(A + B)C = (AC) + (BC)$$

$$AB \neq BA$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 6 & 8 & 12 \\ 6 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplikation

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

MATRIX-MULTIPLY(A, B)

```
1  if  $A.columns \neq B.rows$ 
2      error "incompatible dimensions"
3  else let  $C$  be a new  $A.rows \times B.columns$  matrix
4      for  $i = 1$  to  $A.rows$ 
5          for  $j = 1$  to  $B.columns$ 
6               $c_{ij} = 0$ 
7              for  $k = 1$  to  $A.columns$ 
8                   $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$ 
9      return  $C$ 
```

Naive implementation: tid $O(npm)$

Strassen's Matrix Multiplikation

1969

$$\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

$$I = S_5 + S_6 + S_4 - S_2$$

$$= (A + D)(E + H) + (B - D)(G + H) + D(G - E) - (A + B)H$$

$$= AE + DE + AH + DH + BG - DG + BH - DH + DG - DE - AH - BH$$

$$= AE + BG.$$

$$J = S_1 + S_2$$

$$= A(F - H) + (A + B)H$$

$$= AF - AH + AH + BH$$

$$= AF + BH.$$

$$K = S_3 + S_4$$

$$= (C + D)E + D(G - E)$$

$$= CE + DE + DG - DE$$

$$= CE + DG.$$

$$L = S_1 - S_7 - S_3 + S_5$$

$$= A(F - H) - (A - C)(E + F) - (C + D)E + (A + D)(E + H)$$

$$= AF - AH - AE + CE - AF + CF - CE - DE + AE + DE + AH + DH$$

$$= CF + DH.$$

$$S_1 = A \cdot (F - H)$$

$$S_2 = (A + B) \cdot H$$

$$S_3 = (C + D) \cdot E$$

$$S_4 = D \cdot (G - E)$$

$$S_5 = (A + D) \cdot (E + H)$$

$$S_6 = (B - D) \cdot (G + H)$$

$$S_7 = (A - C) \cdot (E + F)$$

7 rekursive multiplikationen

Strassen's Matrix Multiplikation

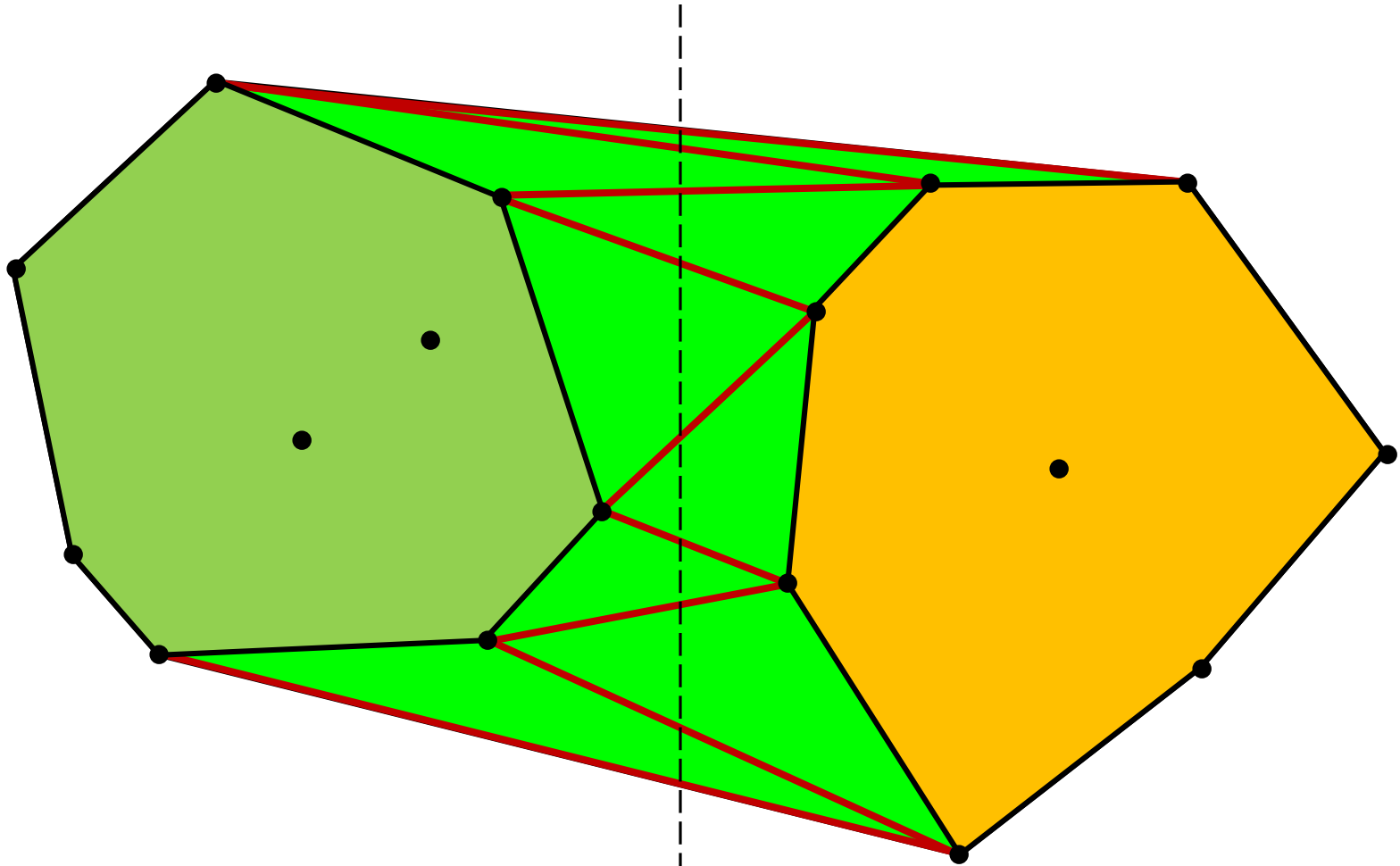
- Bruger **18 matrix additioner** (tid $O(n^2)$) og **7 rekursive matrix multiplikationer**

$$T(n) \leq 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2 \quad \text{for } n \geq 2$$

$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$

- $T(n) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})$

Konveks Hylster

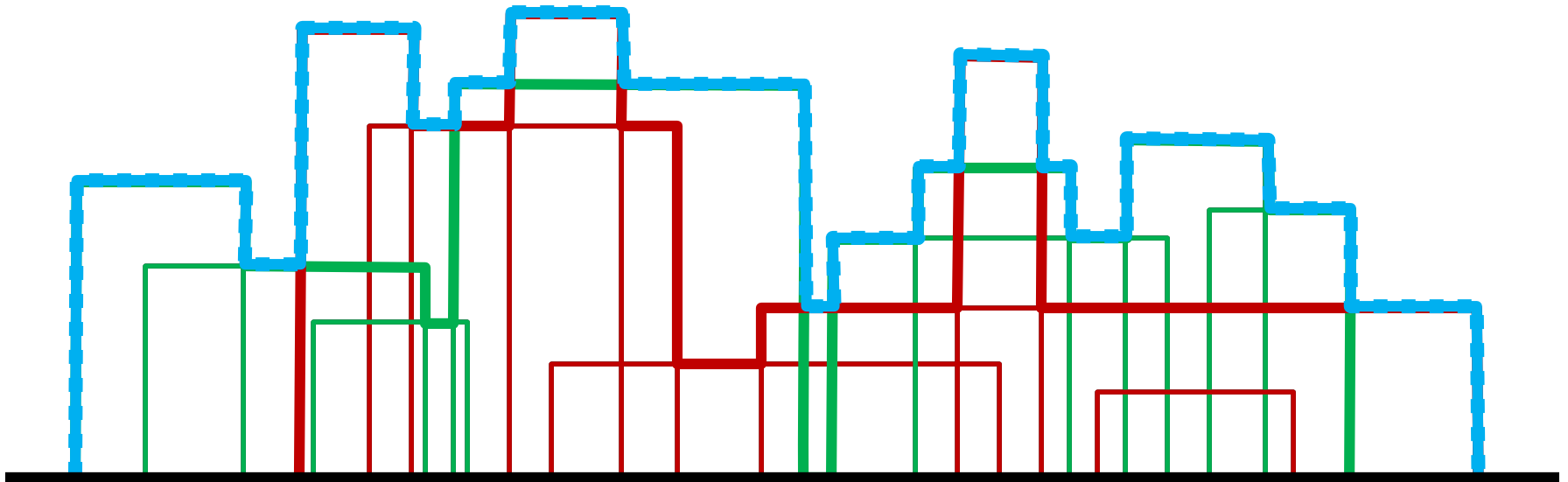


$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 \cdot T(n/2) + c \cdot n && \text{for } n \geq 2 \\ T(n) &\leq c && \text{for } n = 1 \end{aligned}$$

$$T(n) = O(n \cdot \log n)$$

Silhuet

(afleveringsopgave)



$$T(n) \leq ? \cdot T(n/?) + ? \quad \text{for } n \geq 2$$
$$T(n) \leq c \quad \text{for } n = 1$$