

Grafer og Algoritmer

Gerth Stølting Brodal

Institut for Datalogi
Aarhus Universitet

U-days, Aarhus Universitet, 20.-21. februar 2025



Datalogi, obligatorisk

Matematik støttefag

Valgfrie

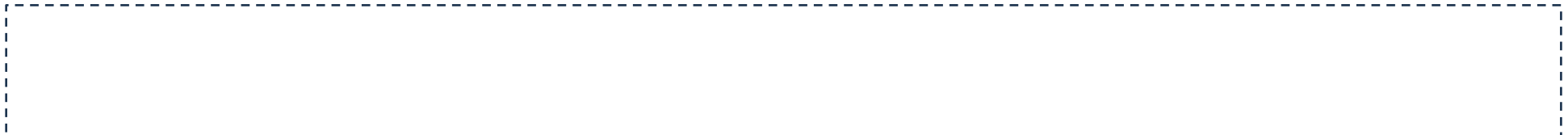
Bachelor

Semester 1	Introduction to Programming	Algorithms and Data Structures	Introduction to Mathematics and Optimisation
Semester 2	Computer Architecture, Networks and Operating Systems	Programming Languages	Computability and Logic
Semester 3	Software Engineering and Architecture	Human-Computer Interaction	Introduction to Probability Theory and Statistics
Semester 4	Databases	Distributed Systems and Security	Numerical Linear Algebra
Semester 5	Compilation	Experimental Systems Development	Machine Learning
Semester 6	Bachelor Project	Philosophy and Ethics of Computer Science	Optimization

Kandidat

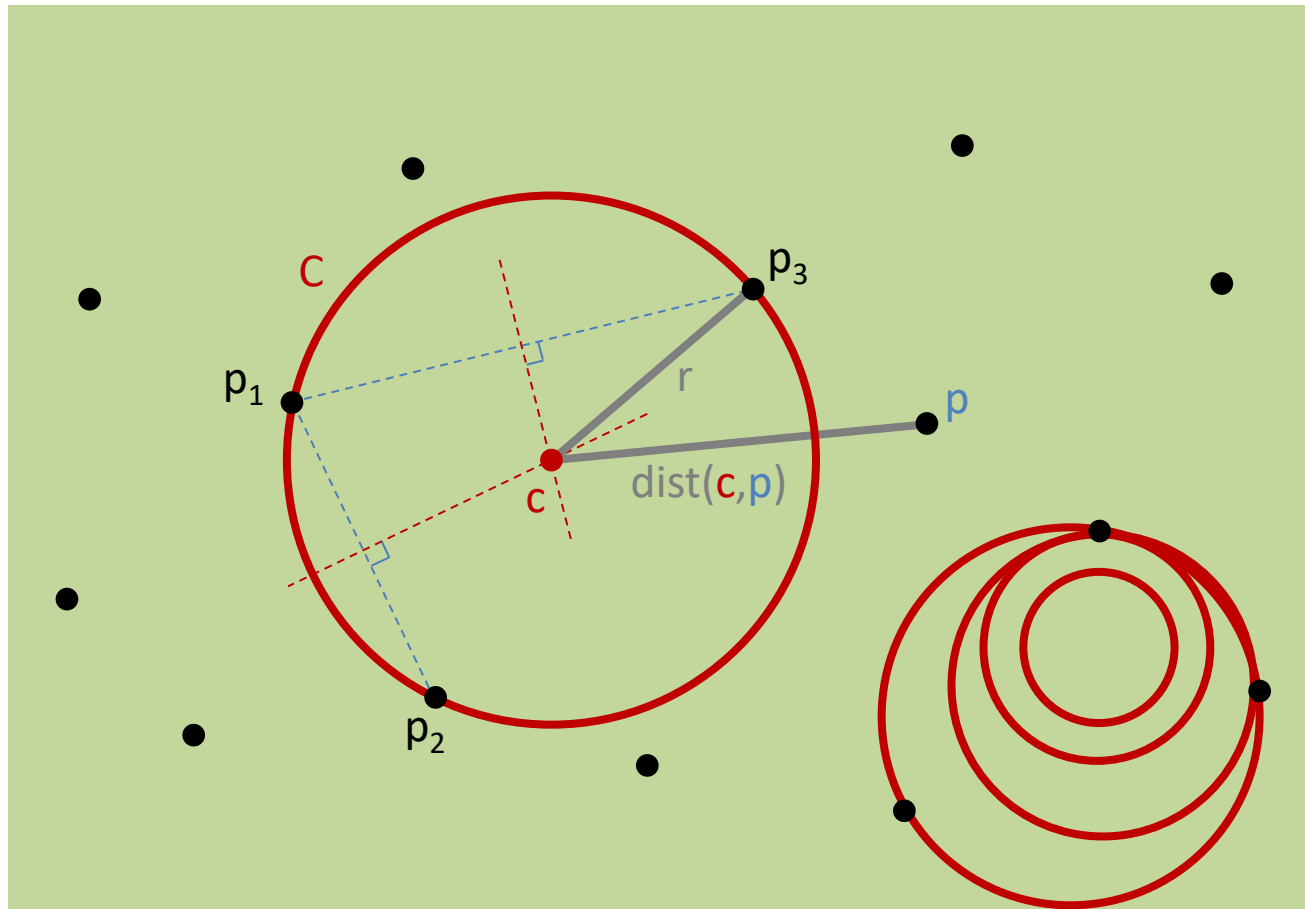
Semester 7	Computational Geometry: Theory and Experimentation	Program Analysis	Building the Internet of Things with P2P and Cloud Computing
Semester 8	Randomized Algorithms	Language-based Security	Augmented Reality
			Advanced Augmented Reality Project
Semester 9	Theory of Algorithms and Computational Complexity	Advanced Topics in Programming Language Theory	Deep Learning for Visual Recognition
Semester 10	Master Thesis		

PhD



Fokus er på de **overordnede idéer**

Største Tomme Cirkel

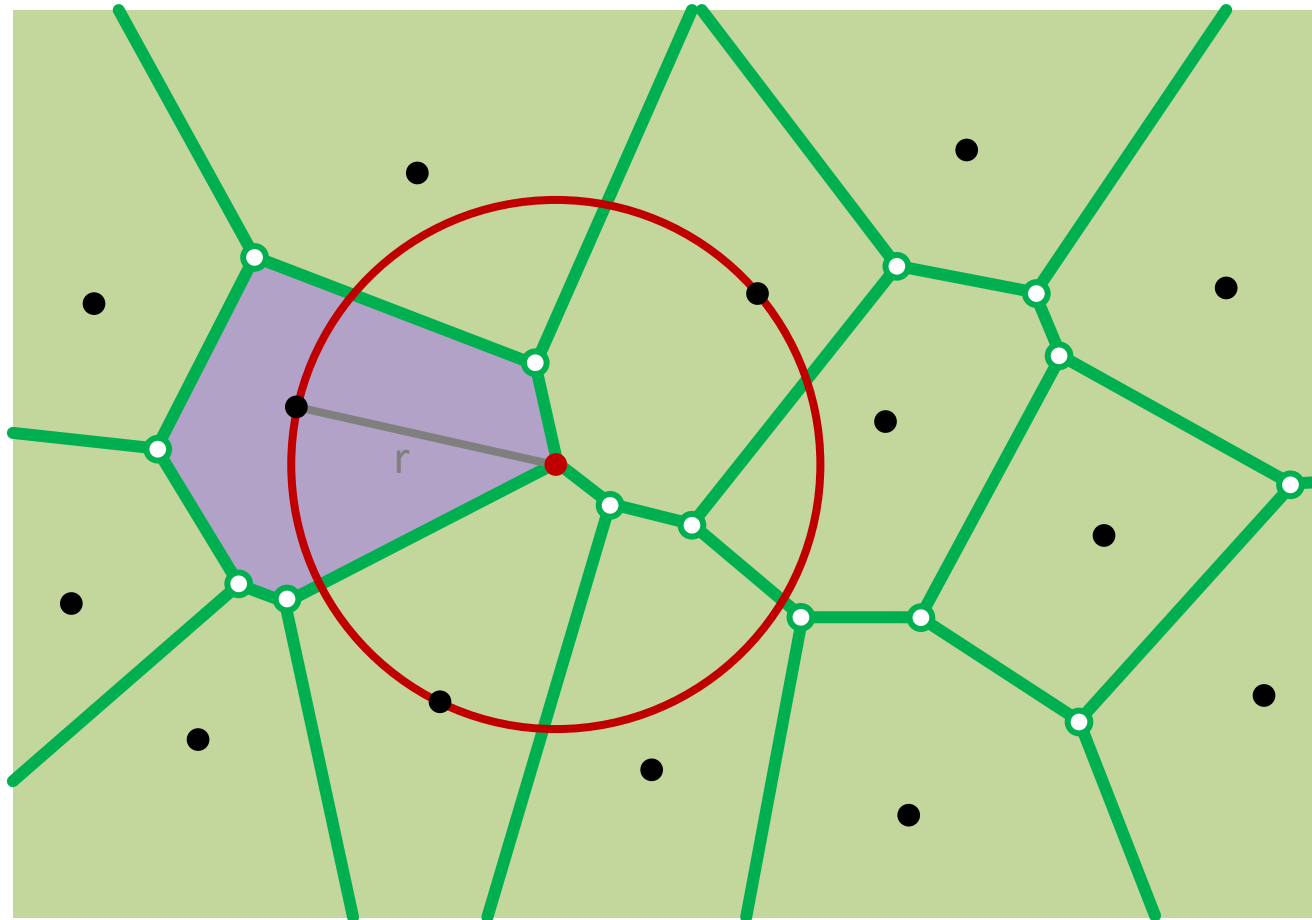


Algoritme

```
for alle mulige  $(p_1, p_2, p_3)$  :  
  find  $C$  med  $p_1, p_2, p_3$  på randen  
  for alle punkter  $p$  :  
    hvis  $p$  inde i  $C$  prøv næste  $(p_1, p_2, p_3)$   
   $C$  mulig kandidat  
Rapporter største kandidat fundet
```

Sætning Største tomme cirkel har
mindst 3 punkter på randen

Største Tomme Cirkel



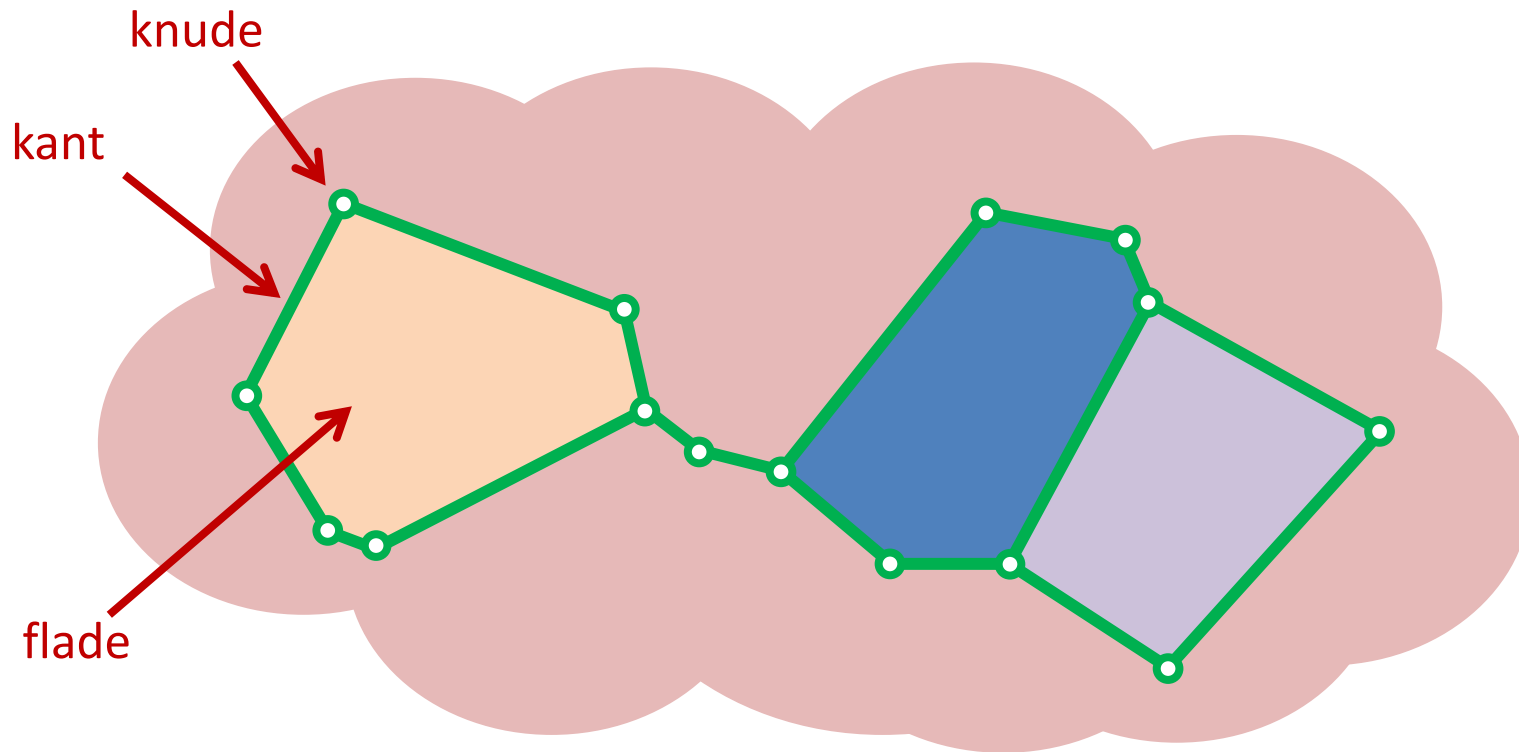
Voronoi diagram

Algoritme

Konstruer **Voronoi diagrammet**
For alle **knuder** find **radius** af **cirklen**
Rapporter **knuden** med størst **radius**

Sætning Antal Voronoi **knuder** $\leq 2 \cdot$ antal **punkter**

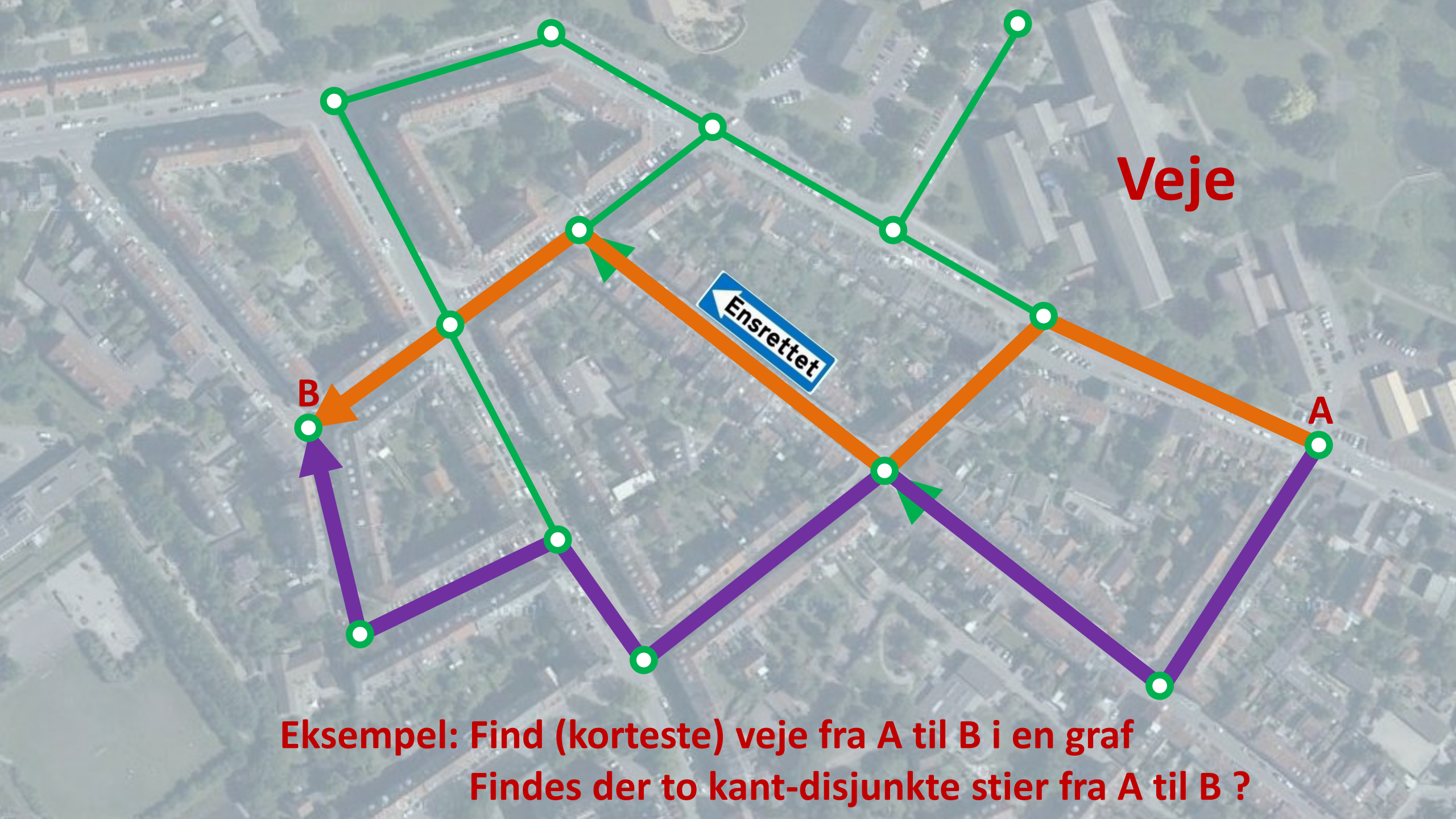
Graf



Euler's Sætning : # knuder + # flader - # kanter = 2

$$15 + 4 - 17 = 2$$

(gælder for sammenhængende grafer der kan tegnes uden krydsende kanter)



Veje

B

A

Ensrettet

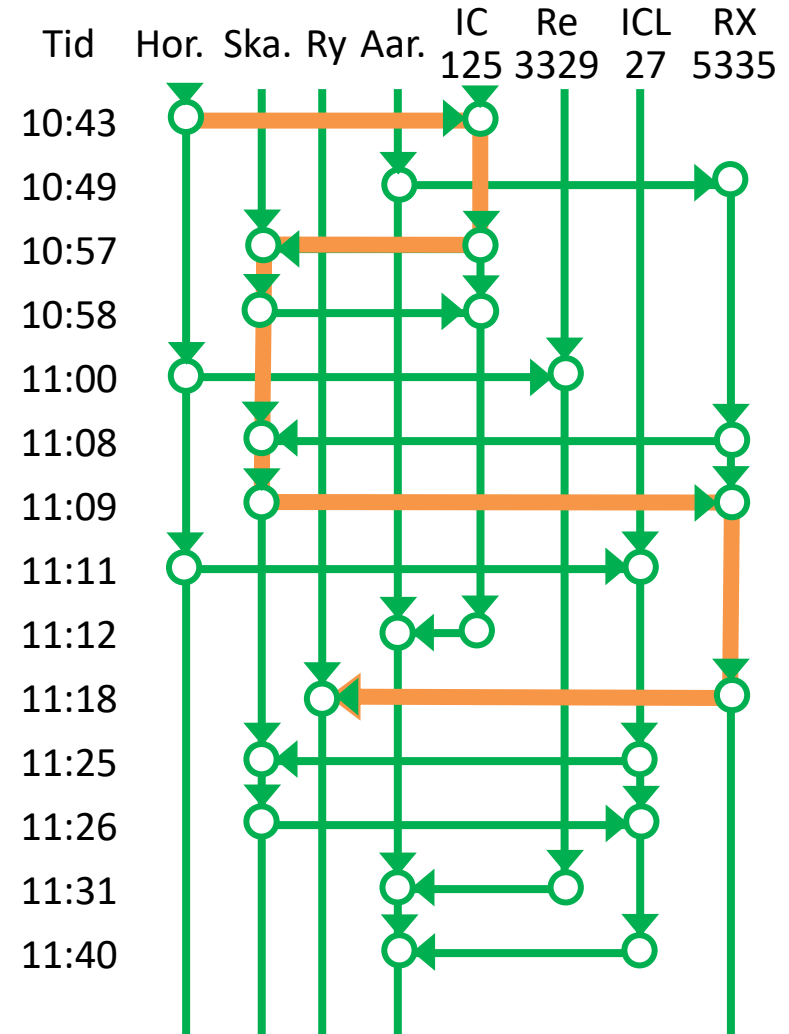
Eksempel: Find (korteste) veje fra A til B i en graf
Findes der to kant-disjunkte stier fra A til B ?

Rejseplan (Horsens til Ry)

Tog	Ank	Afg	Station
		10:43	Horsens
IC125	10:57	10:58	Skanderborg St
	11:12		Aarhus H
Re3329		11:00	Horsens
	11:31		Aarhus H
		11:11	Horsens
ICL27	11:25	11:26	Skanderborg St
	11:40		Aarhus H
		10:49	Aarhus H
RX5335	11:08	11:09	Skanderborg St
	11:18		Ry St



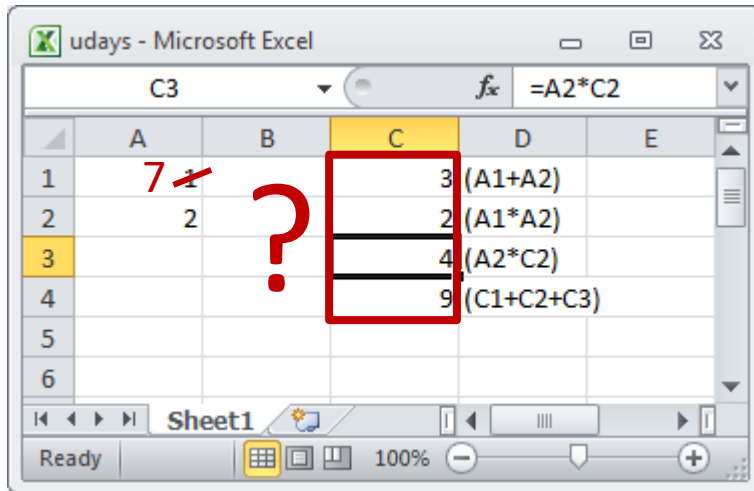
uddrag af køreplaner



Algoritme

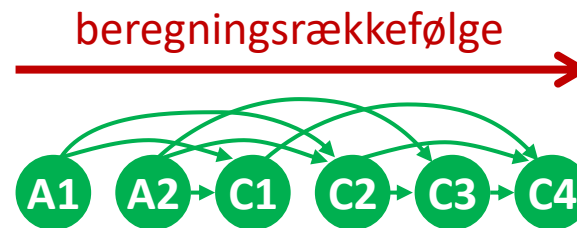
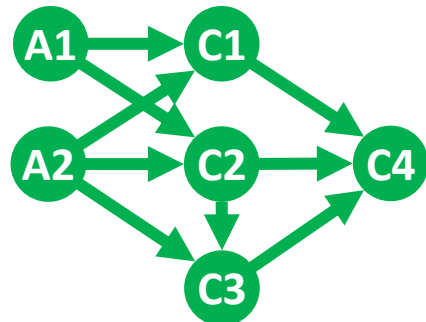
Find tidligste knude for **Ry** der kan nås fra en given start-knude i **Horsens**

Opdatering af Regneark



Algoritme

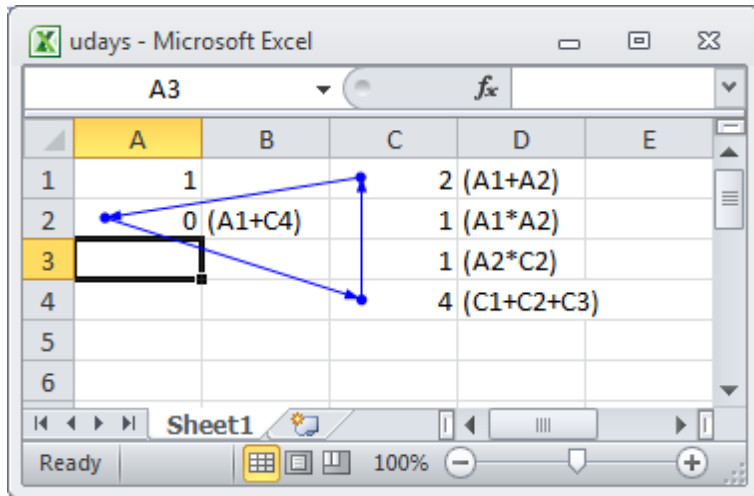
Så længe der findes en uberegnet celle **c**
hvor alle afhængigheder er beregnet :
Beregn **c**



topologisk sortering

alle kanter peger fra venstre mod højre

Opdatering af Regneark



	A	B	C	D	E
1	1		2 (A1+A2)		
2	0 (A1+C4)		1 (A1*A2)		
3			1 (A2*C2)		
4			4 (C1+C2+C3)		
5					
6					

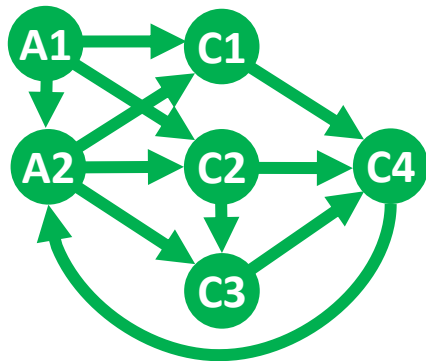
Algoritme

Så længe der findes en uberegnet celle **c**
hvor alle afhængigheder er beregnet :

Beregn **c**

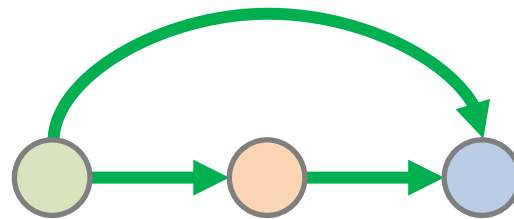
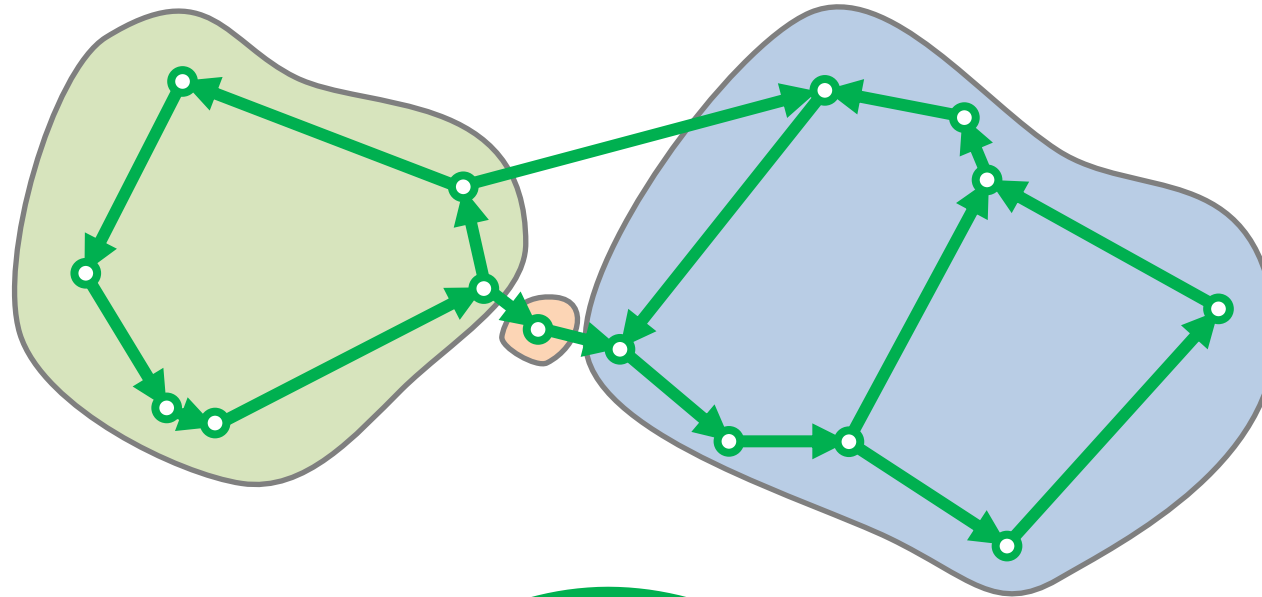
Hvis ikke alle celler beregnet :

Rapporter at der findes en **cykel**



topologisk sorterer
eller
identificerer en cykel

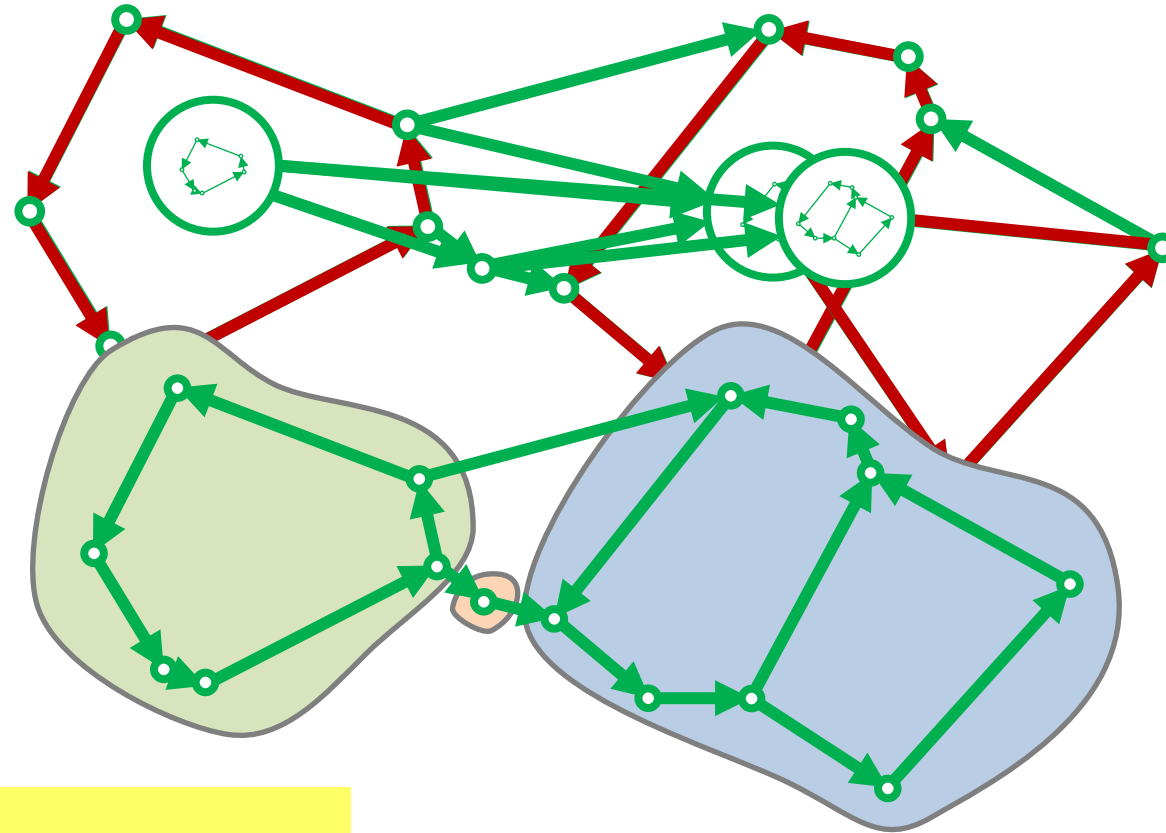
Stærke Sammenhængskomponenter



(topologisk sortering)

- Kan alle par af knuder nå hinanden **begge veje** ?
(bruges f.eks. til at checke for fejl i vej-data)

Stærke Sammenhængskomponenter



Algoritme :

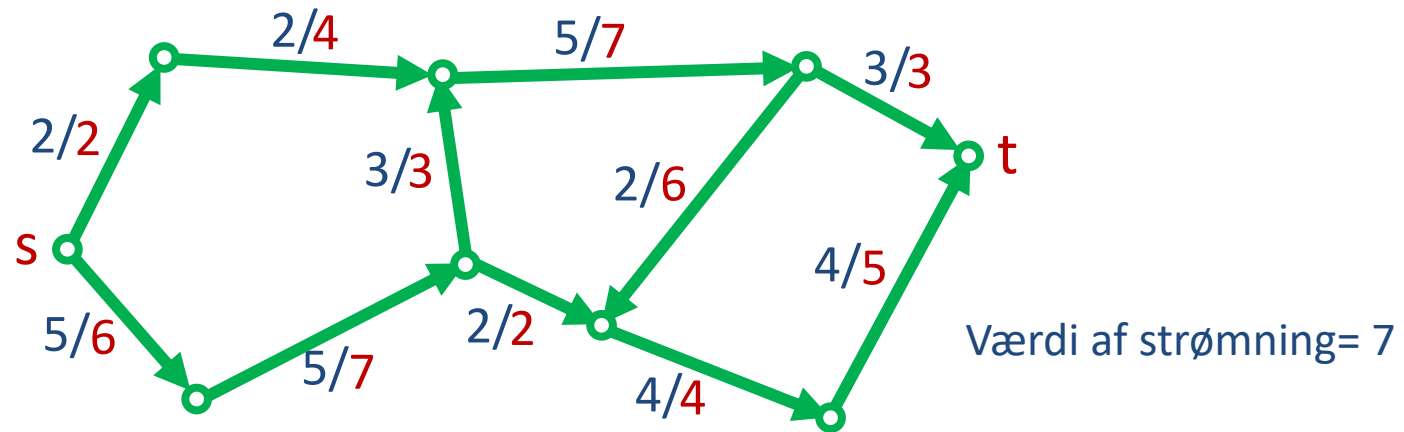
Så længe der findes en cykel **C** :
Træk **C** sammen til en knude

PAGE 3

DEPARTMENT	COURSE	DESCRIPTION	PREREQS
COMPUTER SCIENCE	CPSC 432	INTERMEDIATE COMPILER DESIGN, WITH A FOCUS ON DEPENDENCY RESOLUTION.	CPSC 432

xkcd.com/754

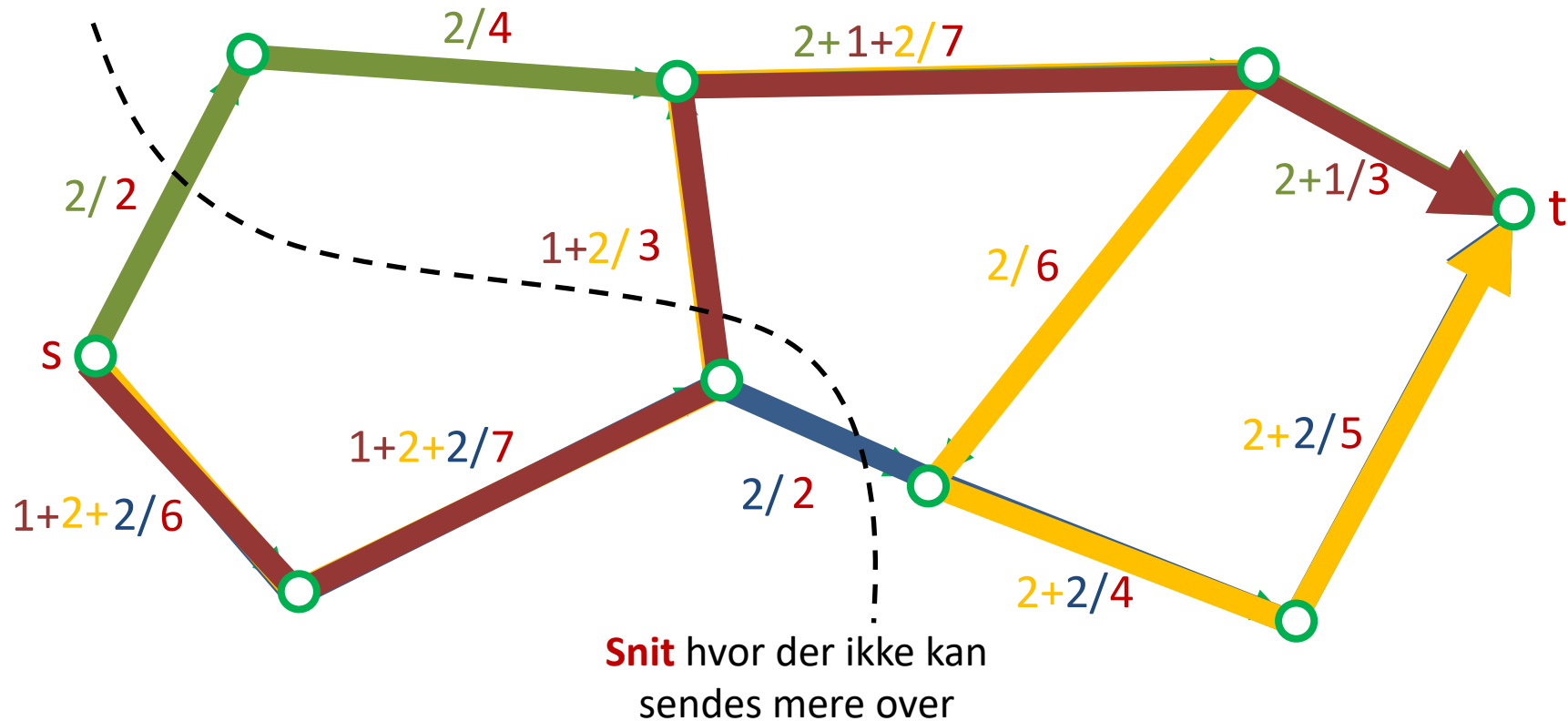
Strømninger i Netværk



- Hver kant har en **kapacitet**
- Send størst mulig **værdi** fra **s** til **t**

(f.eks. vand, kloak, fjernvarme, vejnet kapacitet, el netværk)

Beregning af Strømninger i Netværk

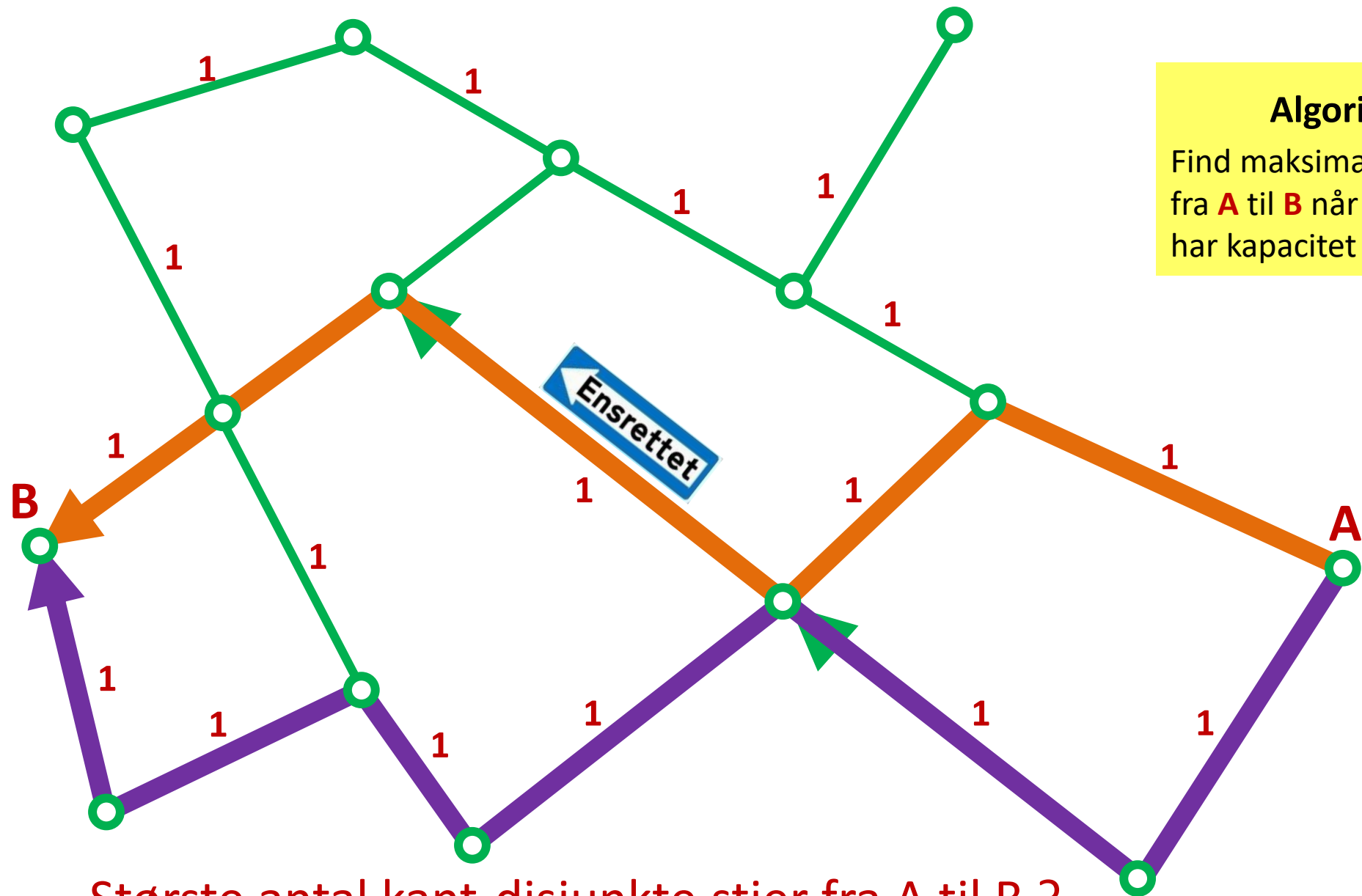


Algoritme

Så længe der findes en *forbedrende sti* **P** :
Send maksimal yderligere værdi langs stien **P**

Sætning

Max strømning = min *st*-snit

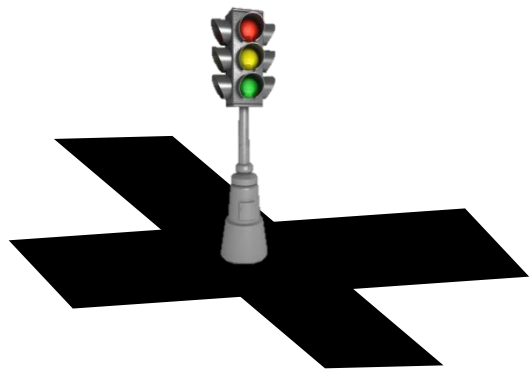


Algoritme
 Find maksimal strømning fra **A** til **B** når alle kanter har kapacitet **1**

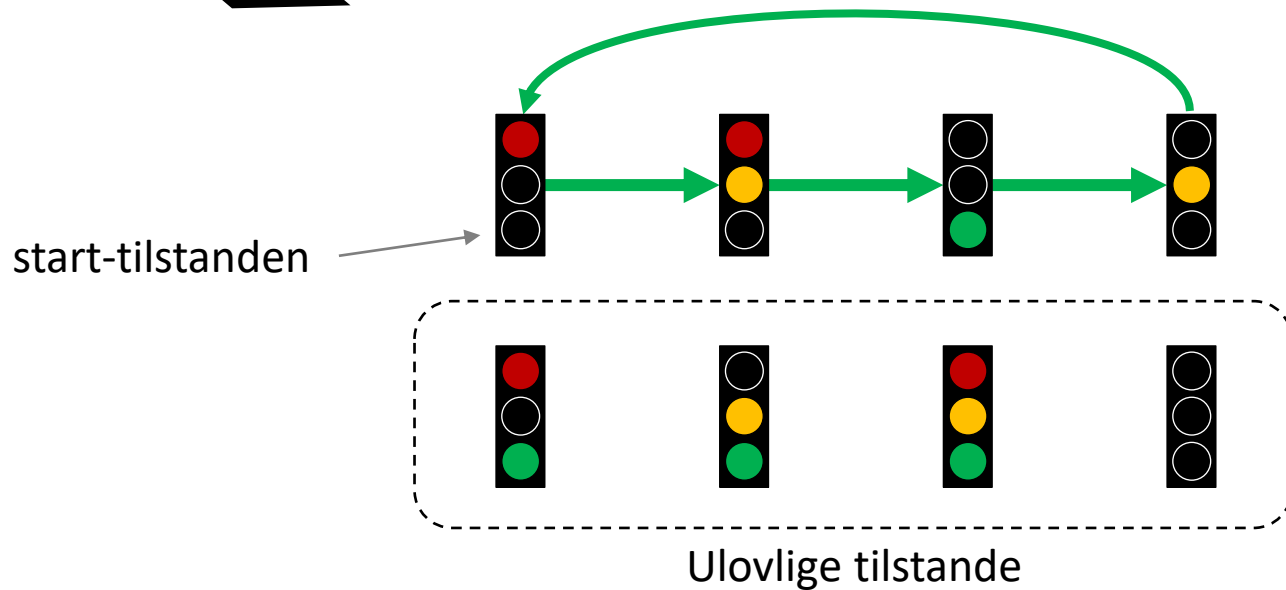
Største antal kant-disjunkte stier fra A til B ?

II (Menger's sætning)

Mindste antal kanter der skal fjernes så B ikke kan nås fra A ?

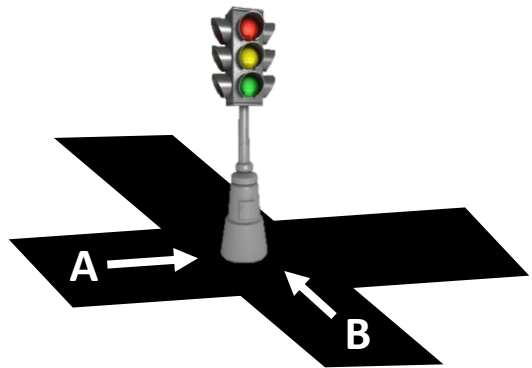


Lyskryds

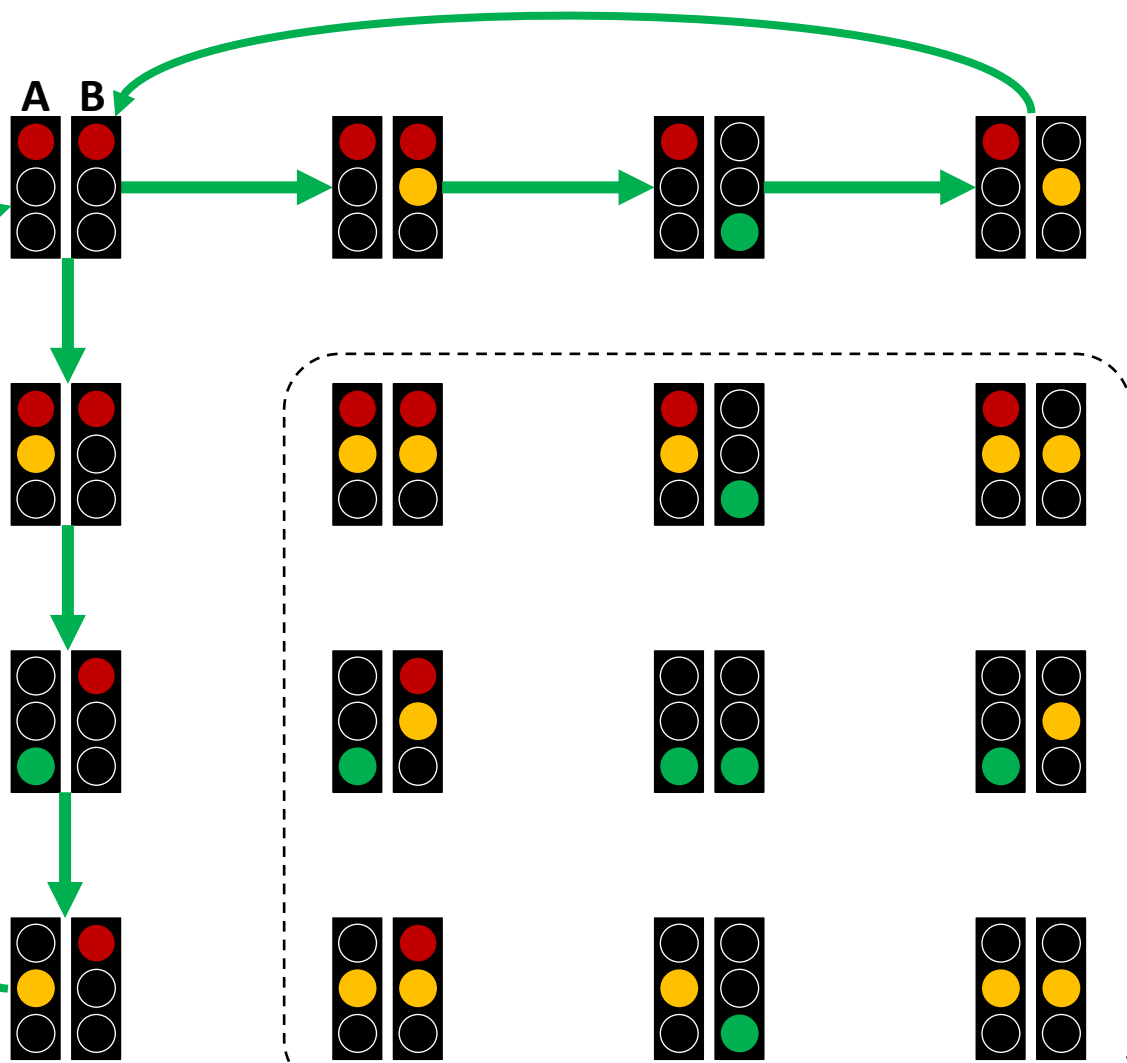


Automatisk kontrol af software til f.eks. styring af lyskryds

- Hvilke tilstande kan man nå (fra start-tilstanden) ?
- Er alle tilstande man kan nå lovlige ?
- Kan der altid blive grønt igen (liveness) ?



Lyskryds



Ulovlige tilstande

Google Street View
Vestre Ringgade / Randersvej



Grafer og Algoritmer

Opsummering

- Planare grafer (Voronoi diagram, Euler's formel)
- Vejnet som grafer (korteste veje, disjunkte stier, stærk sammenhængende)
- Rejseplaner (modellering som graf)
- Regneark (cykler i grafer, topologisk sortering)
- Strømninger i grafer
- 2-kant sammenhængende grafer
- Tilstandsgrafer (lyskryds)

Mange problemer kan løses med generelle **grafalgoritmer**

Find ud af mere om...

Datalogi
(Computer Science)

IT-Produktudvikling
(IT Product Development)

bachelor.au.dk/datalogi
bachelor.au.dk/it

cs.au.dk/datalog eller cs.au.dk/lab

cs.au.dk/bachelor

cs.au.dk/studievalg

cs.au.dk/karriere

cs.au.dk/studerendeforendag

cs.au.dk/besøg

u-days

Mere Datalogi under u-days?
Se program på
cs.au.dk/udays-datalogi

Mere IT-Produktudvikling
under u-days? Se program på
cs.au.dk/udays-it



Spørgsmål?



INSTITUT FOR DATALOGI
AARHUS UNIVERSITET