

Datalogiforelæsning

Gerth Stølting Brodal

May 10, 1994

SRC Research
Report

124

A Block-sorting Lossless Data Compression Algorithm

M. Burrows and D.J. Wheeler

digital

Systems Research Center
130 Lytton Avenue
Palo Alto, California 94301

May 10, 1994

SRC Research
Report

124

A Block-sorting Lossless Data Compression Algorithm

M. Burrows and D.J. Wheeler

digital

Systems Research Center
130 Lytton Avenue
Palo Alto, California 94301

Burrows - Wheeler transformation



Michael Burrows



David J. Wheeler

Opfundet af Wheeler (1927-2004) i 1978

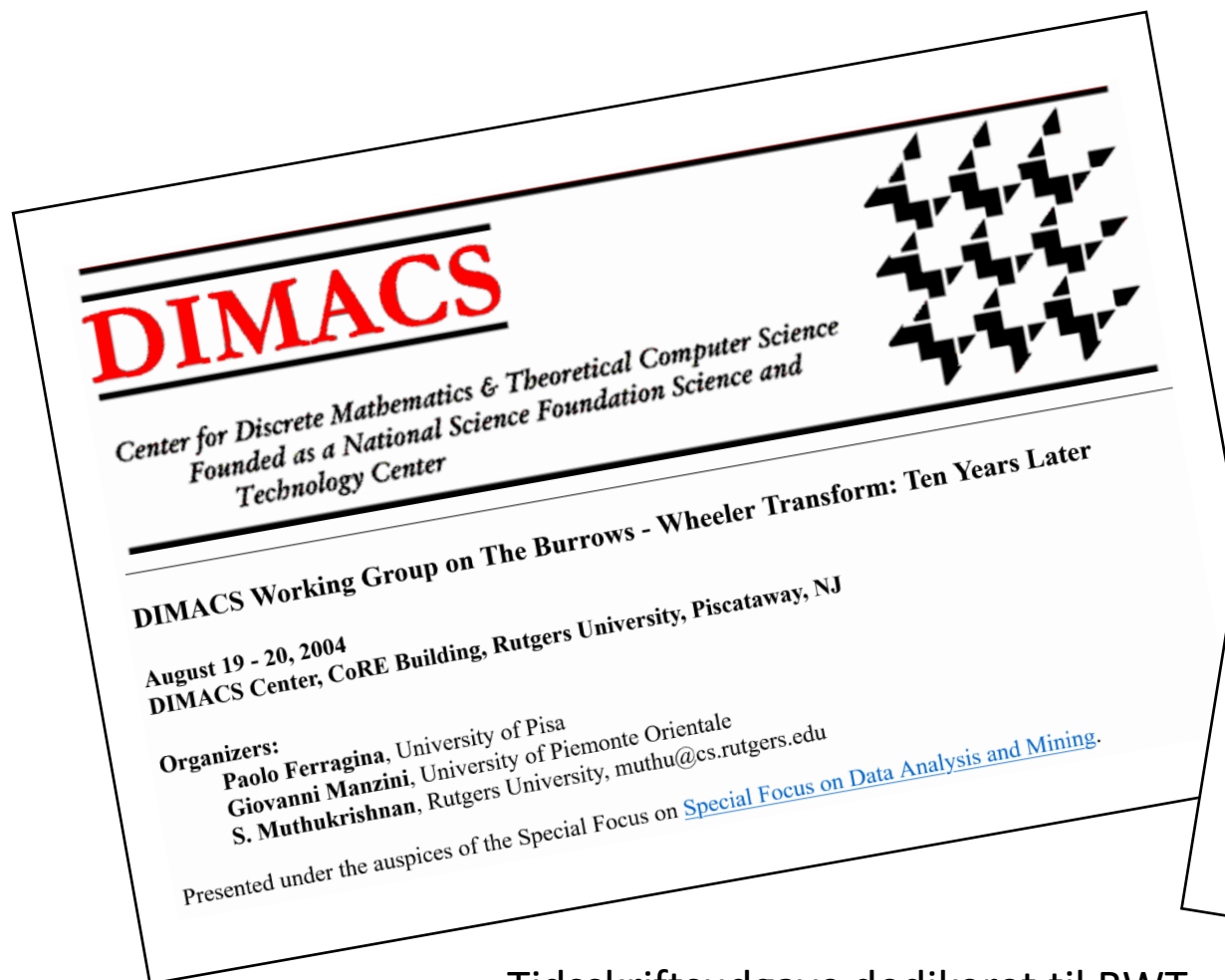
Burrows var ph.d. studerende af Wheeler @ Cambridge

Teknisk rapport 1994

"Annual Data Compression Conference"
afviste at publicere resultatet

Burrows: 2022 ACM Paris Kanellakis Theory and Practice Award

Det var åbenbart en god idé...

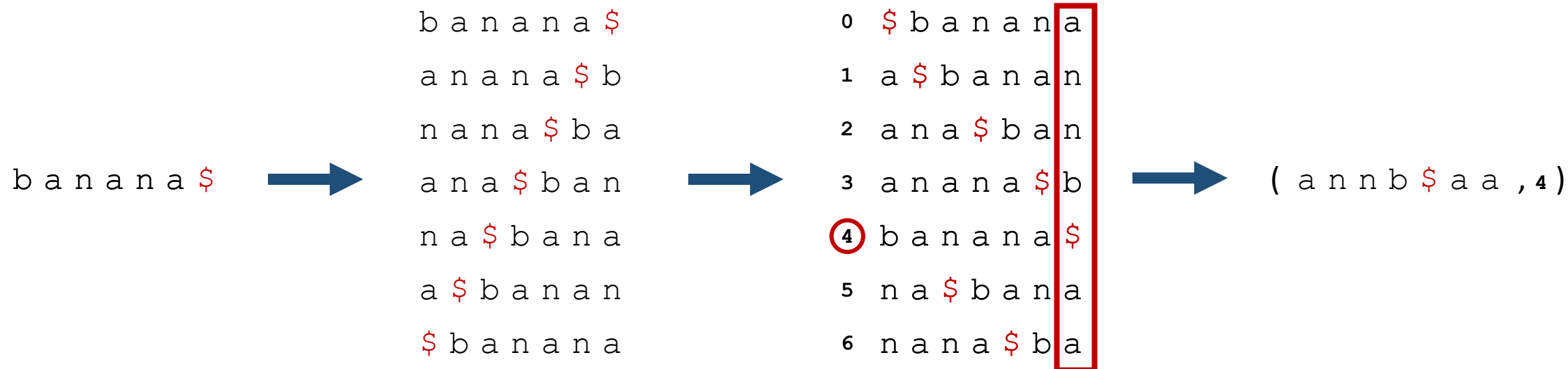


Report from Dagstuhl Seminar 19241
25 Years of the Burrows-Wheeler Transform
Edited by
Travis Gagie¹, Giovanni Manzini², Gonzalo Navarro³, and
Jens Stoye⁴



Tidsskriftsudgave dedikeret til BWT
doi.org/10.1016/j.tcs.2007.07.011

Burrows-Wheeler transformation



Input

En **streng**, som ender på et tegn \$, der ellers ikke forekommer og er mindre end alle andre tegn ($\$ < a < b < n$)

Trin 1

Konstruer alle **cykliske rotationer/skift** af strengen

Trin 2

Sorter alle rotationerne alfabetisk/leksikografisk

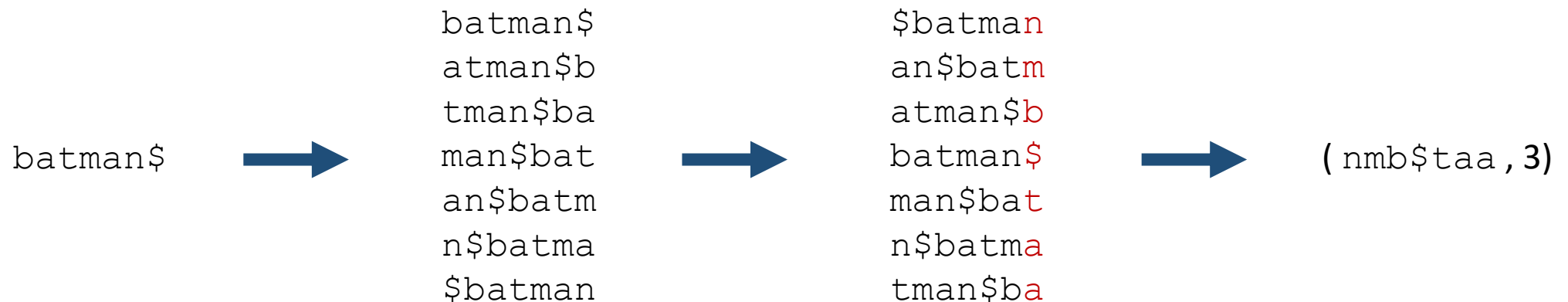
Output

Den **sidste kolonne** som en streng + **indeks** på rækken der indeholder input strengen

Burrows-Wheeler transformantionen af batman\$?

- a) (bmn\$taa , 3)
- b) (\$batman , 0)
- 😊 c) (nmb\$taa , 3)
- d) (\$aabmnt , 0)
- e) (nmb\$aata , 3)

www.menti.com
2402 9043



Tre oplagte spørgsmål

- Kan transformation **inverteres** ?

(nmb\$taa , 3) → batman\$

- Kan transformationerne beregnes **effektivt** ?

somelongstring\$

1.000.000 tegn



```
$somelongstring  
elongstring$som  
g$somelongstrin  
gstring$somelon  
ing$somelongstr  
longstring$some  
melongstring$so  
ng$somelongstri  
ngstring$somelo  
omelongstring$s  
ongstring$somel  
ring$somelongst  
somelongstring$  
string$somelong  
tring$somelong
```

midlertidigt
1.000.000.000.000 tegn
men output kun
1.000.000 tegn

- Kan transformationen overhovedet **bruges til noget** ?

[Google scholar](#) giver +2500 citationer

Inverse Burrows-Wheeler transformation

Hvilket index får man fra Burrows-Wheeler transformationen?

(i t d \$ o g a l a , _)

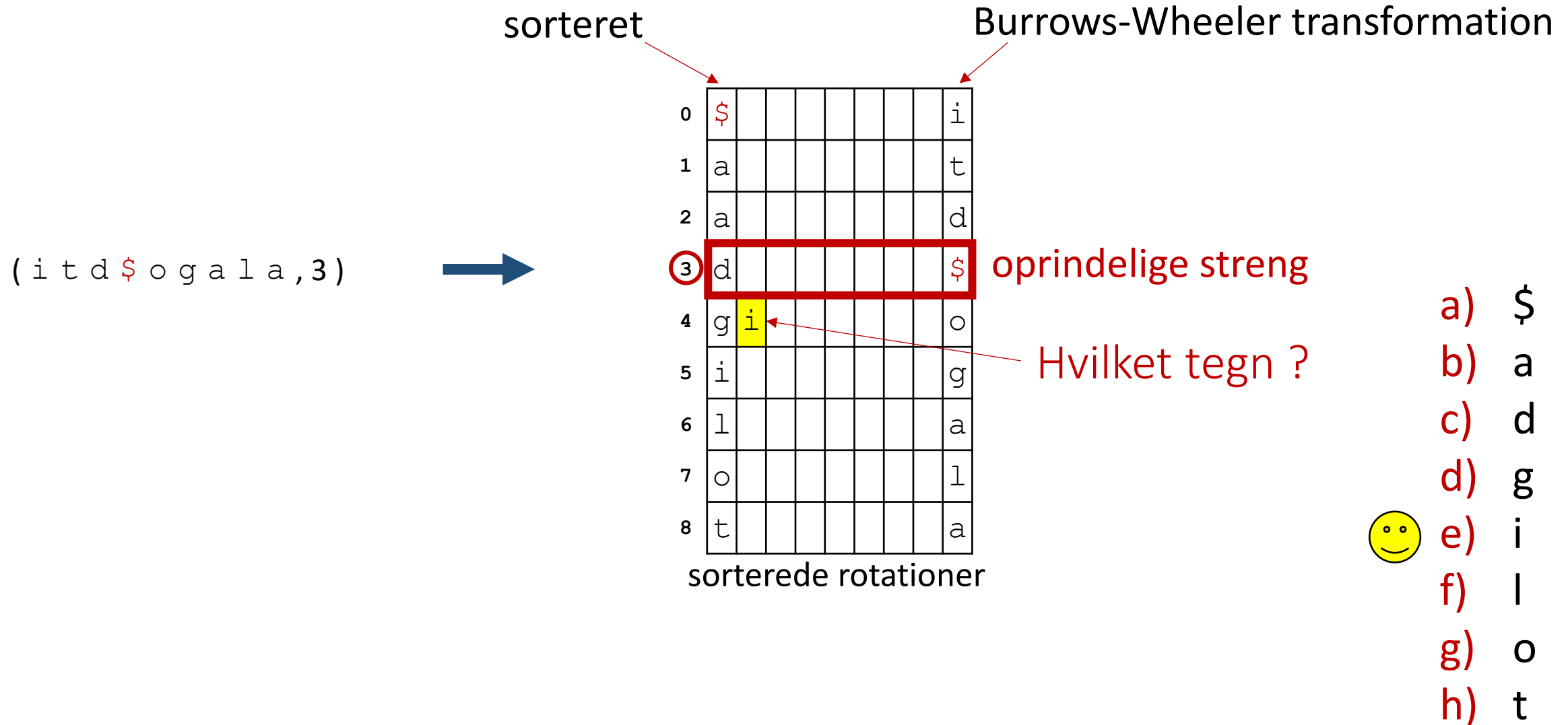


- a) 0
- b) 1
- c) 2
-  d) 3 = indekset på \$ i Burrows-Wheeler transformationen
- e) 4
- f) 5
- g) 6
- h) 7
- i) 8

Bemærk

Tilstrækkeligt enten at tilføje \$ til sidst i strengen eller gemme et indeks

Inverse Burrows-Wheeler transformation



Inverse Burrows-Wheeler transformation

(i t d \$ o g a l a , 3)



0	\$	d						i
1	a	l						t
2	a	t						d
3	d	a						\$
4	g	i						o
5	i	\$						g
6	l	o						a
7	o	g						l
8	t	a						a

sorterede rotationer



i \$
t a
d a
\$ d
o g
g i
a l
l o
a t



sorter

\$ d
a l
a t
d a
g i
i \$
l o
o g
t a

to første
kolonner

Inverse Burrows-Wheeler transformation

(i t d \$ o g a l a , 3)



0	\$	d	a					i
1	a	l	o					t
2	a	t	a					d
3	d	a	t					\$
4	g	i	\$					o
5	i	\$	d					g
6	l	o	g					a
7	o	g	i					l
8	t	a	l					a

sorterede rotationer



i \$ d	\$ d a
t a l	a l o
d a t	a t a
\$ d a	d a t
o g i	g i \$
g i \$	i \$ d
a l o	l o g
l o g	o g i
a t a	t a l

sorter

Inverse Burrows-Wheeler transformation

(i t d \$ o g a l a , 3)



0	\$	d	a	t	a	l	o	g	i
1	a	l	o	g	i	\$	d	a	t
2	a	t	a	l	o	g	i	\$	d
3	d	a	t	a	l	o	g	i	\$
4	g	i	\$	d	a	t	a	l	o
5	i	\$	d	a	t	a	l	o	g
6	l	o	g	i	\$	d	a	t	a
7	o	g	i	\$	d	a	t	a	l
8	t	a	l	o	g	i	\$	d	a

sorterede rotationer



d a t a l o g i \$

Invers Burrows-Wheeler transformation

Sætning

Man kan fra Burrows-Wheeler transformationen af en streng rekonstruere den oprindelige streng

`(i t d $ o g a l a , 3)`  `d a t a l o g i $`

Hurtigere inverse Burrows-Wheeler transformation

Idé – konstruer kun første og sidste kolonne

(i t d \$ o g a l a , 3)



0	\$	d	a	t	a	l	o	g	i
1	a ¹	l	o	g	i	\$	d	a	t
2	a ²	t	a	l	o	g	i	d	
3	d	a	t	a	l	o	g	i	\$
4	g	i	d	a	l	a	l	o	
5	i	\$	d	a	l	o	g		
6	l	o	a	l	\$	d	a	t	a ¹
7	o	g	i	\$	d	a	t	a	l
8	t	a	l	o	g	i	\$	d	a ²



d a t a l o g i \$

Hurtigere inverse Burrows-Wheeler transformation

Idé – konstruer kun første og sidste kolonne

(i t d \$ o g a l a , 3)



0	\$	d	a	t	a	l	o	g	i
1	a ¹	l	o	g	i	\$	d	a	t
2	a ²	t	a	l	o	g	i	d	
3	d	a	t	a	l	o	g	i	\$
4	g	a	l	a	a	l	o		
5	i	\$	d	a	l	o	g		
6	l	o	a	l	\$	d	a	t	a ¹
7	o	g	i	\$	d	a	t	a	l
8	t	a	l	o	g	i	\$	d	a ²



d a t a l o g i \$

Python implementation

```
def BurrowsWheeler(text):
    S = sorted(text[i:] + text[:i] for i in range(len(text)))
    idx = S.index(text)
    bwt = ''.join(x[-1] for x in S)
    return (bwt, idx)

def InverseBurrowsWheeler(bwt, idx):
    S = [''] * len(bwt)
    for _ in range(len(bwt)):
        S = sorted(c + s for s, c in zip(S, bwt))
    return S[idx]

def EfficientInverseBurrowsWheeler(bwt, idx):
    r = []
    cnt = {}
    for char in bwt:
        r.append(cnt.get(char, 0))
        cnt[char] = cnt.get(char, 0) + 1
    s = 0
    for char in sorted(cnt):
        s, cnt[char] = s + cnt[char], s
    S = []
    for _ in range(len(bwt)):
        S.append(bwt[idx])
        idx = cnt[bwt[idx]] + r[idx]
    return ''.join(reversed(S))
```

Den Grimme Ælling (Hans Christian Andersen, 1843)

Der var så dejligt ude på landet; det var sommer, kornet stod gult, havren grøn, høet var rejst i stakke nede i de grønne enge, og der gik storken på sine lange, røde ben. Det sprog havde han lært af sin moder. Rundt om ager og eng var der store søer; jo, der var rigtignok dejligt derude på landet! Midt i solskinnerne med dybe kanaler rundt om, og fra muren og ned til vandet voksede store træer, at små børn kunne stå oprejste under de største; der var lige så meget skov, og her lå en and på sin rede; hun skulle ruge sine små ællinger. Hun var ked af det, fordi det varede så længe, og hun sjældent fik visit; de små ællinger svømme om i kanalerne, end at løbe op og sidde under et skræppeblad for



Burrows-Wheeler transformation

!.edtmned,rfeå;irkåiågr;,,ttr;ifdeår,gernd,,gnrnedeg,dglrrg;,åemmttt,
npnteteåeednnrrer,gfååeneeitentetgi,rtitrekeetrreeednrteelgurtrtrrtål
rlln tnnnghkk vll lvvvvvvvvv hhyøy ee eneoerneui ø veuue ede
iilnn rddnnddbnrkmbddlgtrrndnddgbtddrjdnggvgddtdppkmmnsrkrdrdr
dlhdkn dnøddddd~~aaa~~ oooooooooon uinnnan i iii æ
soiis k krksaay sssssos eibb æiolaa jlluæou ooom m m øao o
aaaauueniir nreeæaiøuig jtm r nvhs s ss ffftttkkkkoppææos
efåoedooda r pvu eoøeopeææ kk ggek i il d j ejræ
eliesssssg pssss ssn r rkghhh Rrkmo aoo asddtgmsllsppstpp

416 f at svømme om i kan...ldt mere a
417 f det, fordi det var...sten ked a
418 f sin moder. Rundt o...han lært a
419 fik visit; de andre ...n sjældent
420 for at snadre med he...ræppeblad
421 for det sprog havde ...ægyptisk,
422 fordi det varede så ...d af det,
423 fra muren og ned til...dt om, og
424 g der gik storken på...ne enge, o
425 g eng var der store ... om ager o
426 g fra muren og ned t...undt om, o
427 g havde han lært af ...r det spro
428 g her lå en and på s...te skov, o
429 g hun sjældent fik vi...å længe, o
430 g midt i skovene dyb...e skove, o
431 g ned til vandet vok...ra muren o
432 g sidde under et skr... løbe op o
433 g snakkede ægyptisk,...røde ben o
434 g var der store skov...ager og en
435 gammel herregård med...lå der en
436 ge sine små ællinger... skulle ru
437 ge så vildsomt derin...der var li
438 ge, og der gik stork... grønne en
439 ge, og hun sjældent f...ede så lan
440 ge, røde ben og snak...å sine lan

BWT kan forbedre eksisterende tabsfri komprimerings metoder

Der var så dejligt ude på landet; det var sommer, kornet stod gult, havren grøn, høet var rejst i stakke nede i de grønne enge, og der gik storken på sine lange, røde ben og snakkede ægyptisk, for det sprog havde han lært af sin moder. Rundt om ager og eng var der store skove, og midt i skovene dybe søer; jo, der var rigtig nok dejligt derude på landet! Midt i solskinnet lå der en gammel herregård med dybe kanaler rundt om, og fra muren og ned til vandet voksede store skræppeblade, der var så høje, at små børn kunne stå oprejste under de største; der var lige så vildsomt derinde, som i den tykke skov, og her lå en and på sin rede; hun skulle ruge sine små ællinger ud, men nu var hun næsten ked af det, fordi det varede så længe, og hun sjældn fik vitsit; de andre ænder holdt mere af at svømme om i kanalerne, end at løbe op og sidde under et skræppeblad for at snadre med hende.\$

original dokument

BWT



inverse BWT

1.edtmnedcfeâ;irkâiâgr;,,,ttr;rfdeâr,ger
 nd,,,grnreded,dglrr;,,âemmtt;ein,nâârter
 ânde,tgnagenn,r,,,,nnpnteâeâednnrrer,gf
 ââeneieitetgti,rtirtrekeetreeedntteelgu
 rtrtrtrktâetê.eoeektrndrnmveeereteter\$
 rlln tnnngghk vl lvvvvvvvvv hhy
 øy ee eæææærneui ø veuue eædanne l n
 n o n n n r n l i l n n r d n n d d n b n r k m
 b d d l g t r n n d n d g b t d d r j d n g v g g d d t p p k m n s r k
 r d r d d r d r t m b d h v d d d d d h l g d g d d d m d m
 d l h d k n d n ø d d d d d d d a a a o o o o o o o o o o o n u i n n
 n a n i i i i e e d s m t l l i r
 g f t v s r s l l k t v ø e e e s o o i i s k k r k s a a y s s s
 s s o s e i b b æ i o l a a j j l u u o o o o m m
 m ø a o s s e e e e e e e e e e e e u e o s s a a a e i u e u u
 a a a a u e n i n r n r e æ æ i o u i g j t m r
 n v h s s s s f f f t t t k k k k o p a o s y o e a o e
 e a e a e a e a e a e e e e e e f a e d o o d a r p v u e ø
 e o p e ø æ æ k k g g k i i l d j
 e j r æ r m g d d s e a d d e a e a e e e e e e
 e l i e s s s s s g p s s s s s n r k g h n h R k m o
 a o o a s d d t g m l l s p p t p p s m g j l r l l
 n l r s h v r r b t

Burrows-Wheeler transform

komprimere



dekomprimere

```

1111000001001111100101011001110111110111
011100010000000000100000100110101000111
0111111110011010100010001010010001001110
110101001111111101010101010000010111
000000001001100100101010111000011111010
10010101011001100011000000011000100010001
00110010010111001010101011110010101000
10011111100111010010100000011111101011
0000010000000101001010010011000011111
10111000101001101010100001000101100101
110101011111011100011100010111101011
1100010010101010101010100110010010010
0101000000100001111101010100100010100100
11111110010100100010010100100100010100
01111111110010011110010111010011010
010000101010101000101101111011001110
1101100100100100101000101110011010001
11101010100000000101010101001111010011
0001110101010011111000010111000001

```

komprimeret
(mindre)

Eksempel: bzip2

(BWT + run-length encoding + move-to-front + Huffman codes + delta encoding + ...)

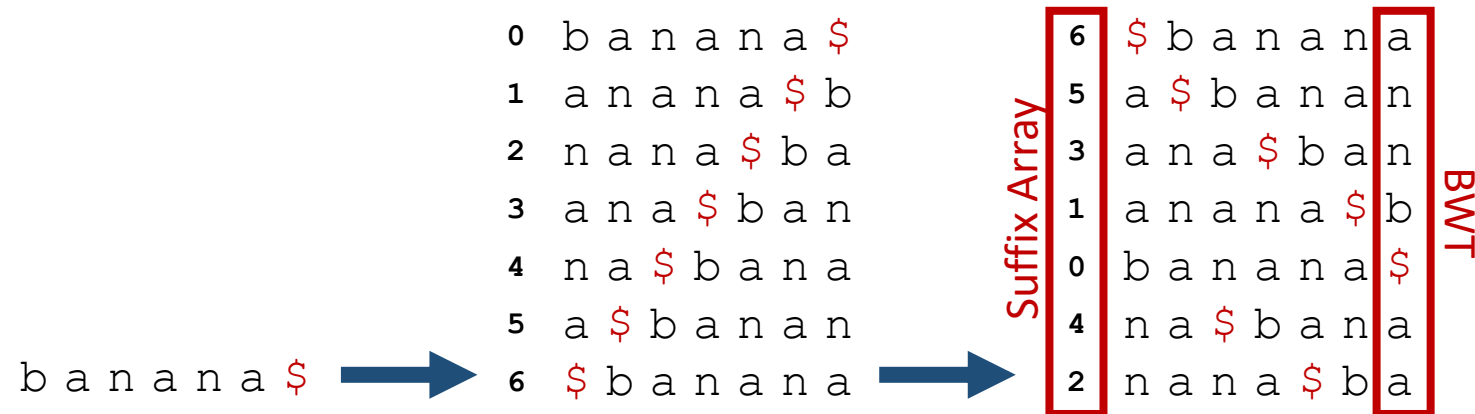
Mønstergenkendelse (FM-index)

[Ferragina, Manzin, FOCS 2000]

Givet en streng, byg en **søgestruktur** så vi effektivt kan finde alle forekomster af en delstreng (mønster)

Der var så dejligt ude på landet; det var sommer, kornet stod gult, havren grøn, høet var rejst i stakke nede i de grønne enge, og der gik storken på sine lange, røde ben og snakkede ægyptisk, for det sprog havde han lært af sin moder. Rundt om ager og eng var der store skove, og midt i skovene dybesøer; jo, der var rigtignok dejligt derude på landet! Midt i solskinnet lå der en gammel herregård med dybe kanaler rundt om, og fra muren og ned til vandet voksede store **skræppeblade**, der var så høje, at små børn kunne stå oprejste under de største; der var lige så vildsomt derinde, som i den tykkeste skov, og her lå en and på sin rede; hun skulle ruge sine små ællinger ud, men nu var hun næsten ked af det, fordi det varede så længe, og hun sjælden fik visit; de andre ænder holdt mere af at svømme om i kanalerne, end at løbe op og sidde under et **skræppeblad** for at snadre med hende.\$

Kan løses ved at kombinere
BWT med "Suffix-Arrays"
(plus lidt mere)



Opsummering

- Burrows-Wheeler transformation
 - kan beregnes effektivt (ikke vist)
 - der findes en invers transformation
 - den inverse kan beregnes effektivt
- Mange (overraskende) anvendelser, f.eks.
 - komprimering af sekvenser og billeder
 - hukommelseffektive søgestrukturer til mønstergenkendelse
 - bioinformatik, f.eks. "sequence alignment"
(AU bioinformatikkursus *Genome-Scale Algorithms*)



Michael Burrows



David J. Wheeler

Velkommen til *itd\$ogala*



Link til slides