

DATALOGISK INSTITUT, AARHUS UNIVERSITET

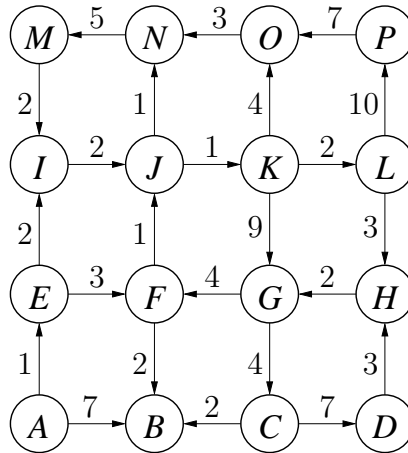
Det Naturvidenskabelige Fakultet
EKSAMEN
Grundkurser i Datalogi
Algoritmer og Datastrukturer 2 (2003-ordning)
Antal sider i opgavesættet (incl. forsiden): 6 (seks)
Eksamensdag: Mandag den 11. august 2008, kl. 9.00-13.00
Eksamenslokale: Willemoesgade 15, 8200 Århus N
Tilladte medbragte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, lommeregner). Computer må ikke medbringes.
Materiale der udleveres til eksaminanden:

OPGAVETEKSTEN
BEGYNDER
PÅ NÆSTE SIDE

—oOo—

Opgave 1 (25%)

Betragt nedenstående orienterede graf med ikke-negative vægte på kanterne. Det antages af incidenslisterne er sorteret leksikografisk.



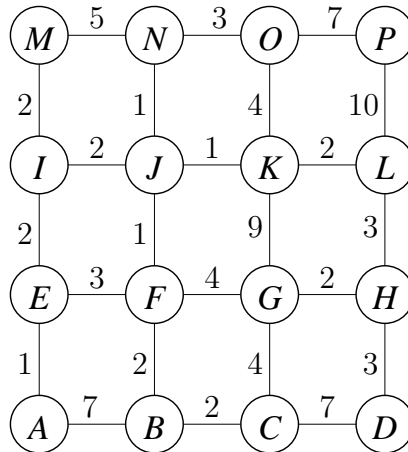
Spørgsmål a: Angiv resultatet af et BFS gennemløb for ovenstående graf, når BFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i BFS træet og BFS numrerne for knuderne.

Spørgsmål b: Angiv resultatet af et DFS gennemløb for ovenstående graf, når DFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv kanterne i DFS træet og for hver knude “discovery time” og “finishing time”.

Spørgsmål c: Angiv et kortest veje træ for ovenstående graf, når kortest veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. For hver knude angiv også afstanden til startknuden A.

Spørgsmål d: Angiv de stærke sammenhængskomponenter i ovenstående graf.

Betragt nu følgende uorienterede graf med vægte på kanterne.

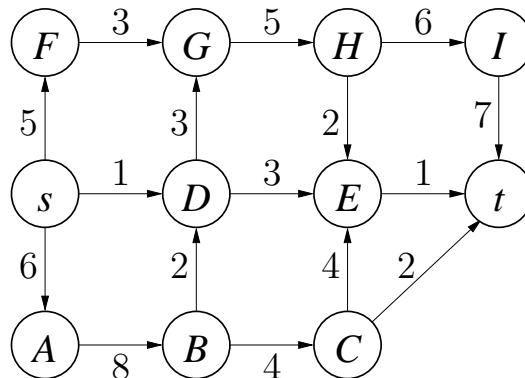


Spørgsmål e: Angiv kanterne i et minimum udspændende træ for ovenstående graf.

(Opgavesættet fortsætter)

Opgave 2 (15%)

Betragt nedenstående netværk med de angivne kapaciteter på kanterne.

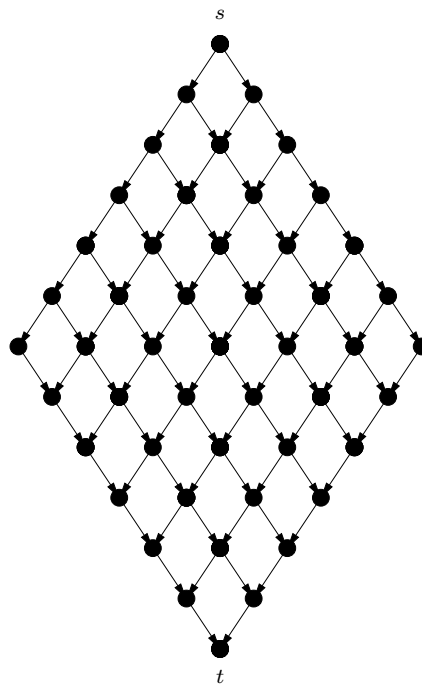


Spørgsmål a: Angiv en maximal strømning fra s til t i netværket (angiv for hver kant strømningen langs kanten), angiv størrelsen af en maximal strømning, og angiv et snit (d.v.s. opdeling af knuderne i to disjunkte mængder) hvor kapaciteten af snittet er lig den maximale strømning. □

Spørgsmål b: Betragt Edmonds-Karp algoritmen anvendt på ovenstående graf til beregning af en maximal strømning. Angiv de forbedrende stier der anvendes under udførelsen af Edmonds-Karp algoritmen. For hver forbedrende sti angiv knuderne på stien og strømningen man forbedrer med langs stien. □

Opgave 3 (20%)

I denne opgave betragter vi k -diamant-grafer. En k -diamant-graf består af $2k - 1$ rækker af knuder, med henholdsvis $1, 2, 3, \dots, k - 1, k, k - 1, \dots, 3, 2, 1$ knuder. Den j 'te knude i række i har orienterede kanter til den j 'te og $j + 1$ 'te knude i række $i + 1$ - såfremt disse knuder eksisterer. Den øverste knude betegnes s og den nederste knude t . Eksemplet nedenfor viser en 7-diamant-graf.



Spørgsmål a: Angiv antal knuder n og kanter m i en k -diamant-graf som funktion af k . Angiv udførelstiden for Dijkstra's algoritme for at løse korteste veje problemet på en positiv vægtet k -diamant-graf som funktion af k . □

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der finder en korteste vej fra s til t i en positiv vægtet k -diamant-graf i tid $O(m)$. □

Spørgsmål c: Angiv en algoritme der finder *to knude-disjunkte veje fra s til t* (dvs. to stier der forbinder s og t , men kun har knuderne s og t til fælles) i en positiv vægtet k -diamant-graf, hvor de to stier til sammen har *mindst mulig samlet vægt*. Angiv algoritmens udførelstid. □

Opgave 4 (20%)

Lad $X = x_1, \dots, x_n$ og $W = w_1, \dots, w_n$ være sekvenser af længde n , hvor der til hvert element x_i er knyttet en positiv vægt w_i .

I denne opgave ønsker vi at finde en voksende delsekvens af X som har maximal vægt. Det vil sige at vi ønsker at finde en delsekvens $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ af positionerne, hvor $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_\ell}$ og summen $w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_\ell}$ er størst mulig.

For eksempel er den maksimale vægt af en voksende delsekvens i nedenstående eksempel 9.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	6	8	7	<u>5</u>	3	<u>9</u>	4	<u>10</u>	5
w_i	1	1	2	<u>4</u>	1	<u>1</u>	2	<u>4</u>	3

Vi lader $MEH(i)$ betegne den maksimale vægt af en voksende delsekvens, hvor x_i er det sidste element i delsekvensen.

$MEH(i)$ kan beskrives ved følgende rekursionsformel:

$$MEH(i) = \begin{cases} w_i + \max\{MEH(j) \mid 1 \leq j < i \wedge x_j < x_i\} & \text{hvis der findes } 1 \leq j < i \wedge x_j < x_i \\ w_i & \text{ellers} \end{cases}$$

Spørgsmål a: Udfyld nedstående tabel for $MEH(i)$ for ovenstående eksempel.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$MEH(i)$									

□

Spørgsmål b: Angiv en algoritme baseret på dynamisk programmering, der givet sekvenser X og W af længde n , finder en voksende delsekvens af X som har maximal vægt. Angiv algoritmens udførelstid. □

Spørgsmål c: Udvid algoritmen fra spørgsmål b) til, givet sekvenser X og W af længde n , at rapportere en voksende delsekvens af X , der har maksimal vægt. Angiv algoritmens udførelstid. □

Opgave 5 (20%)

I det følgende betragter vi en streng S af længde n over et alfabet med $O(1)$ tegn. Desuden er vi givet et heltal k , hvor $1 \leq k \leq n$.

Vi ønsker at finde en delstreng U af S således at U har længde højst k , og således at forekomsterne af U i S dækker flest mulige tegn i S .

For eksempel hvis $S = \text{DBCDCDCB}$ og $k = 4$, så dækker de to forekomster af $U = \text{CDC}$ i S tilsammen 5 tegn.

Spørgsmål a: Angiv for strengen

$$S = \text{ABABACABADABABAD},$$

en delstreng U af længde højst 5, der dækker flest mulige tegn i S . Angiv U og antallet af tegn i S som dækkes af U . □

Spørgsmål b: Beskriv en algoritme der givet en streng S af længde n og et heltal k , finder en delstreng U af længde højst k , som dækker flest mulige tegn i S . Angiv algoritmens udførselstid som funktion af k og n . □