Opgave 38 Lange heltal

Denne opgave drejer sig om at håndtere ikke-negative heltal af vilkårlig længde. Et sådant heltal repræsenteres ved hjælp af en liste på følgende måde: Tallet 29355891081 repræsenteres som $[1, 8, 0, \ldots, 3, 9, 2]$.

Det mindst betydende ciffer er altså den 0'te indgang i listen. Tallene repræsenteres *uden* foranstillede nuller, så tallet 0 repræsenteres med den tomme liste. Hvis X er en liste, vil vi skrive $\mathrm{tal}(X)$ om det repræsenterede tal. Formelt er

$$\mathrm{tal}(X) = \sum_{i=0}^{|X|-1} X[i] \cdot 10^i.$$

a) Skriv programstumpen S^{end}, så følgende algoritme bliver korrekt. Bevis korrekthed ved hjælp af en passende invariant, I. (Bemærk, at der undervejs i beregningen anvendes en repræsentation *med* foranstillede 0'er)

Algoritme: Sum(X, Y)
Inputbetingelse : X, Y lange heltal, $|X| \geq |Y|$
Outputkrav : $\mathrm{tal}(Z) = \mathrm{tal}(X) + \mathrm{tal}(Y)$
Metode : $Z \leftarrow$ liste af længde $|X|$ med 0 i alle indgange;
$Y \leftarrow$ Y forlænget til længde $|X|$ med foranstillede 0'er;
$i \leftarrow 0; \quad m \leftarrow 0;$
$\{I\}$while $i \neq |X|$ do
    $Z[i] \leftarrow X[i] + Y[i] + m;$
    if $Z[i] \leq 9$ then
        $m \leftarrow 0$
    else
        $Z[i] \leftarrow Z[i] - 10; \quad m \leftarrow 1;$
    $i \leftarrow i + 1$
S^{end}

b) Betragt nu følgende algoritme:

Algoritme: Produkt(X, Y)
Inputbetingelse : X, Y lange heltal
Outputkrav : $\mathrm{tal}(Z) = \mathrm{tal}(X) \cdot \mathrm{tal}(Y)$
Metode : $i \leftarrow 0;$
$S^{\text{init}};$
$\{I\}$while $i \neq |Y|$ do
    $S^{\text{loop}};$
    $i \leftarrow i + 1$

– hvor I er udsagnet $(\mathrm{tal}(Z) = \mathrm{tal}(X) \cdot \mathrm{tal}(Y[0..i])) \wedge (0 \leq i \leq |Y|)$.

Bevis, at hvis denne algoritme er gyldig, så er den også korrekt. Skriv S^{init} og S^{loop}, så algoritmen bliver gyldig. (Man kan bruge Sum til dette.)

c) Angiv udførelsestiderne for algoritmerne under a) og b). Kan du foreslå en repræsentation af lange heltal, der er specielt velegnet, hvis de fleste af cifrene er 0? Begrund svaret.